Aufgabe 41

a) Sei X ein Banachraum, $x, x_n \in X$ und $x', x_n' \in X'$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Falls $x_n \overset{w}{\to} x$ und $x_n' \to x'$ in X', so gilt auch $x_n'(x_n) \to x'(x)$ für $n \to \infty$.

(ii) Falls $x_n \overset{w}{\to} x$ und $x_n' \overset{w^*}{\to} x'$, so gilt auch $x_n'(x_n) \to x'(x)$ für $n \to \infty$.

b) Sei $p \in (1, \infty)$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass für $f \in L^p(\Omega, \mu)$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega, \mu)$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1) $f_n \to f$ für $n \to \infty$ in $L^p(\Omega, \mu)$;

2) $f_n \overset{w}{\to} f$ und $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag: a) (i) Da $x_n \overset{w}{\to} x$ für $n \to \infty$, gilt auch $J_X(x_n) \overset{w^*}{\to} J_X(x)$, d.h. $J_X(x_n)(z') \to J_X(x)(z')$ für $n \to \infty$ und alle $z' \in X'$. Nach dem Satz von Banach Steinhaus ist dann $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|J_X(x_n)\|_{X''} < \infty$, wobei wir hier die Isometrie-Eigenschaft von J_X benutzt haben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\big|x_n'(x_n) - x'(x)\big| &\le \big|x_n'(x_n) - x'(x_n)\big| + \big|x'(x_n) - x'(x)\big| \\
&\le \underbrace{\|x_n' - x'\|_{X'}}_{\to 0} \underbrace{\|x_n\|_X}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{\big|x'(x_n) - x'(x)\big|}_{\to 0,\text{ da } x_n \overset{w}{\to} x} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

a) (ii) Wir zeigen, dass diese Aussage im Allgemeinen nicht gilt. Sei dafür $X = \ell^2$ und $x_n := e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren X' mit ℓ^2 und definieren ebenfalls $x_n' := e_n \in X'$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $y' \in X'$

$$\langle x_n, y' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (e_n)_k y_k' = y_n' \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k'|^2 < \infty$. D.h. $x_n \overset{w}{\to} 0$ für $n \to \infty$. Umgekehrt gilt auch für alle $y \in X$

$$\langle y, x_n' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} y_k'(e_n)_k = y_n' \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

also $x_n' \overset{w^*}{\to} 0$ für $n \to \infty$. Allerdings gilt nun auch

$$\langle x_n, x_n' \rangle = \langle e_n, e_n \rangle = 1 \not\to 0 = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{für } n \to \infty.$$

b) Für diese Aussage existieren viele Beweise. Wir wählen hier einen eher indirekten Zugang, bei dem wir noch ein paar interessante Eigenschaften von L^p-Räumen kennenlernen werden. Zunächst beweisen wir zwei Ungleichungen von Clarkson, aus denen eine geometrische Eigenschaft der L^p-Räume folgt. Diese reicht dann schon aus, um die Behauptung zu zeigen.

Clarkson-Ungleichungen: Für $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ und $q = \frac{p}{p-1}$ gelten

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p}^q + \|f-g\|_{L^p}^q &\le 2\big(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\big)^{q-1}, \quad \text{falls } p \in (1,2), \\
\|f+g\|_{L^p}^p + \|f-g\|_{L^p}^p &\le 2^{p-1}\big(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\big), \quad \text{falls } p \in [2,\infty).
\end{aligned}$$

Beweis der Clarkson-Ungleichungen: Wir zeigen zunächst zwei Hilfsbehauptungen für $p \geq 2$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$|x+y|^p + |x-y|^p \leq 2\big(|x|^q + |y|^q\big)^{p/q}, \tag{1}$$

$$2\big(|x|^q + |y|^q\big)^{p/q} \leq 2^{p-1}\big(|x|^p + |y|^p\big). \tag{2}$$

Für (1) definieren wir die Funktion

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + x^{1/p})^p + (1 - x^{1/p})^p.$$

Dann gilt nach kurzer Rechnung

$$f''(x) \leq 0 \iff (1 - x^{1/p})^{p-2} \leq (1 + x^{1/p})^{p-2},$$

was für $p \geq 2$ und $x \in (0,1)$ stets erfüllt ist (d.h. f ist konkav). Nach dem Mittelwertsatz folgt nun für $x, y \in (0,1)$, $y < x$, die Ungleichung

$$f(x) - f(y) \leq f'(y)(x-y) \iff f(x) \leq f(y) + (x-y)f'(y).$$

Für $y = x^q < x$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x^q + (x - x^q)x^{-1}\big(((1 + x^{q/p})^{p-1} - (1 - x^{q/p})^{p-1}\big) \leq 1 + 1 \cdot (1 + x^{q/p})^{p-1} \\ &\leq 2(1 + x^{q/p})^{p-1}. \end{aligned}$$

Sei nun ohne Einschränkung $x > y \geq 0$. Dann folgt

$$|x+y|^p + |x-y|^p = x^p f\big(\tfrac{y^p}{x^p}\big) \leq 2x^p\big(1 + (\tfrac{y^p}{x^p})^{q/p}\big)^{p-1} \overset{p-1=\frac{p}{q}}{=} 2\big(|x|^q + |y|^q\big)^{p/q}.$$

Kommen wir zu Ungleichung (2). Da die Funktion $t \mapsto t^{p/q}$ konvex ist, folgt

$$2\big(|x|^q + |y|^q\big)^{p/q} = 2\big(\tfrac{1}{2}\,2|x|^q + \tfrac{1}{2}\,2|y|^q\big)^{p/q} \leq 2^{p/q}|x|^p + 2^{p/q}|y|^p = 2^{p-1}\big(|x|^p + |y|^p\big).$$

Sei nun $p \in (1,2)$. Dann ist $q > 2$ und nach der Integralungleichung von Minkowski (siehe Aufgabe 5) und Ungleichung (1) ($q > 2$!) folgt

$$\begin{aligned} \big(\|f+g\|_{L^p}^q + \|f-g\|_{L^p}^q\big)^{1/q} &= \left(\left(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{q/p} + \left(\int_\Omega |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{q/p}\right)^{p/q\, 1/p} \\ &\leq \left(\int_\Omega \big(|f+g|^q + |f-g|^q\big)^{p/q} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\ &\overset{(1)}{\leq} 2^{1/q}\left(\int_\Omega |f|^p + |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\ &= 2^{1/q}\big(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\big)^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Für $p \in [2, \infty)$ folgt die Clarkson'sche Ungleichung unmittelbar aus den Ungleichungen (1) und (2).

Definition: Gleichmäßige Konvexität
Wir nennen einen normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ *gleichmäßig konvex*, falls für jedes $\varepsilon \in (0,2)$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|\frac{1}{2}(f+g)\| > 1 - \delta$ stets $\|f - g\| < \varepsilon$ gilt.

Wir zeigen nun, dass L^p-Räume gleichmäßig konvex sind für $p \in (1, \infty)$.

1. Fall: $p \in (1,2)$. Sei hier $\varepsilon > 0$ und $\delta = 1-\big(1-(\frac{\varepsilon}{2})^q\big)^{1/q} > 0$. Dann gilt für $f, g \in L^p(\Omega,\mu)$ mit $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 1$ und $\|\frac{1}{2}(f+g)\|_{L^p} > 1-\delta$ nach der Ungleichung von Clarkson

$$\|f-g\|_{L^p} \le \big(2\cdot 2^{q-1} - \|f+g\|_{L^p}^q\big)^{1/q} < \big(2^q - (2-2\delta)^q\big)^{1/q} = \varepsilon.$$

2. Fall: $p \in [2,\infty)$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir hier $\delta = 1 - \big(1-(\frac{\varepsilon}{2})^p\big)^{1/p} > 0$. Dann gilt für $f, g \in L^p(\Omega,\mu)$ mit $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 1$ und $\|\frac{1}{2}(f+g)\|_{L^p} > 1-\delta$ nach der Ungleichung von Clarkson

$$\|f-g\|_{L^p} \le \big(2^{p-1}\cdot 2 - \|f+g\|_{L^p}^p\big)^{1/p} < \big(2^p - (2-2\delta)^p\big)^{1/p} = \varepsilon.$$

Die ursprüngliche Behauptung dieser Aufgabe folgt nun aus dem folgenden Resultat:

Proposition
Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum und $x, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

1) $x_n \to x$ für $n \to \infty$ in X;

2) $x_n \overset{w}{\to} x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$.

Beweis: Die Implikation 1) $\Rightarrow$ 2) ist trivial. Im Falle von 2) sei ohne Einschränkung $x, x_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ (für $x = 0$ ist nichts zu zeigen und für $x \neq 0$ ist auch $x_n \neq 0$ für hinreichend große n). Setze dann

$$y := \frac{1}{\|x\|}x, \qquad y_n := \frac{1}{\|x_n\|}x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hier gilt

$$\langle \tfrac{1}{2}(y_n+y), x'\rangle = \frac{1}{2\|x_n\|}\langle x_n, x'\rangle + \frac{1}{2\|x\|}\langle x, x'\rangle \to \frac{1}{\|x\|}\langle x, x'\rangle = \langle y, x'\rangle \quad \text{für } n \to \infty.$$

D.h. $\frac{1}{2}(y_n+y) \overset{w}{\to} y$ für $n \to \infty$. Insbesondere erhalten wir

$$\big|\langle y, x'\rangle\big| \le \liminf_{n\to\infty}\big|\langle \tfrac{1}{2}(y_n+y), x'\rangle\big| \le \big(\liminf_{n\to\infty}\|\tfrac{1}{2}(y_n+y)\|\big)\|x'\|,$$

also nach dem Satz von Hahn-Banach

$$1 = \|y\| \le \liminf_{n\to\infty}\|\tfrac{1}{2}(y_n+y)\| \le 1.$$

D.h. $\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{2}(y_n+y)\| = 1$. Da aber X gleichmäßig konvex ist, impliziert dies

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - y\| = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\|x_n - x\| = \big\|\|x_n\|y_n - \|x\|y\big\| \le \big(\|x_n\| - \|x\|\big)\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkungen

a) Mithilfe der Parallelogrammgleichung kann man leicht zeigen, dass auch jeder Hilbertraum gleichmäßig konvex ist.

b) Nach David Milman ist jeder gleichmäßig konvexe Banachraum schon reflexiv.