KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
30. Oktober 2015

Funktionalanalysis

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 6. November 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 4 - K (Multiplikationsoperatoren)

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $X := C_b(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ ist beschränkt und stetig}\}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, $m \in X$, und M der Multiplikationsoperator

$$M : X \to X, \quad Mf = mf.$$

Zeigen Sie, dass M ein wohldefinierter stetiger Operator ist mit $\|M\| = \|m\|_\infty$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $m : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar. Sei $p \in [1, \infty]$ und sei der Operator M definiert durch $Mf = mf$. Zeigen Sie:

$$M \in B\big(L^p(\Omega, \mu)\big) \iff m \in L^\infty(\Omega, \mu),$$

und in diesem Fall gilt $\|M\| = \|m\|_{L^\infty}$.

Aufgabe 5 - K (Integraloperatoren)

a) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $F : X \times Y \to \mathbb{K}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie für $p \in [1, \infty)$ die *verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung*:

$$\Big(\int_X \Big(\int_Y |F(x,y)| \, \mathrm{d}\nu(y)\Big)^p \mathrm{d}\mu(x)\Big)^{1/p} \le \int_Y \Big(\int_X |F(x,y)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\Big)^{1/p} \mathrm{d}\nu(y).$$

b) Sei $p \in [1, \infty]$. Für $f \in L^p(0, \infty)$ und $x > 0$ definieren wir $Tf(x) := \int_0^\infty K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y$, wobei $K : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{K}$ homogen vom Grad -1 sei, d.h. $K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x,y)$ für alle $\lambda > 0$. Außerdem nehmen wir an, dass

$$\int_0^\infty |K(1,y)| y^{-1/p} \, \mathrm{d}y =: A_K < \infty.$$

(i) Zeigen Sie

$$\|Tf\|_{L^p} \le A_K \|f\|_{L^p}.$$

(ii) Sei nun $K(x,y) := \frac{1}{x+y}$. Beweisen Sie, dass T ein Element von $B\big(L^p(0,\infty)\big)$ ist für jedes $p \in (1, \infty)$.

Aufgabe 6 (Wann definiert eine Metrik eine Norm?)

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ auf dem zusätzlich eine Metrik d definiert sei. Zeigen Sie, dass es genau dann auf X eine Norm $\|\cdot\|$ mit $\|x - y\| = d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ gibt, wenn d translationsinvariant und homogen ist, d.h. es gelten $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ sowie $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ für alle $x, y, z \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$.