KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 6. November 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

# Funktionalanalysis

## 3. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 13. November 2015, 13:30 Uhr

### Aufgabe 7 - K (Metrische Räume)

a) Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir die Abbildung $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}, \\ |x| + |y|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert und skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,(0,0)) = 1\}, \quad M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,(1,1)) = 1\},$$
$$M_3 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,(1,1)) = 2\}.$$

b) Sei $X$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, Halbnormen auf $X$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiere mit $p_k(x) > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}, \qquad x, y \in X,$$

eine Metrik auf $X$ definiert. Zeigen Sie außerdem, dass eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ genau dann gegen ein $x \in X$ bezüglich $d$ konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} p_j(x_n - x) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

### Aufgabe 8 - K (Abschluss und Inneres)

Bestimmen Sie für die folgenden normierten Räume $X$ und Teilmengen $Y \subseteq X$ den Abschluss $\overline{Y}$ und das Innere $\mathring{Y}$ von $Y$ bezüglich der Supremumsnorm:

a) $X = C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \colon \|f\|_\infty < \infty\}, \quad Y = \{f \in X \colon f(t) = f(t+1)\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$;

b) $X = C[0,1], \quad Y = \{f \in X \colon \exists\, f'(0) \text{ und } f'(0) = 0\}$;

c) $X = C[0,1], \quad Y = \{f \in X \colon |f(t) - f(s)| \leq 2|t-s|\ \forall\, s,t \in [0,1]\}$;

d) $X = C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \colon \lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0\}, \quad Y = \{f \in X \colon |f(t)| < \frac{1}{1+|t|}\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$;

e) $X = C_0(\mathbb{R}), \quad Y = C_c(\mathbb{R}) := \{f \in X \colon\ \exists\, a < b \text{ mit } f(t) = 0 \text{ für } t \leq a \text{ und } t \geq b\}$.

### Aufgabe 9 (Lineare Funktionale)

Sei $X$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $x' \colon X \to \mathbb{K}$ linear. Zeigen Sie, dass der Kern von $x'$ entweder abgeschlossen oder dicht in $X$ ist.