KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 27. November 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Funktionalanalysis
6. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 4. Dezember 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 16 - K (Kompaktheit in C^1)

Wir betrachten den Banachraum $(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1})$. Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subseteq C^1[0,1]$ genau dann relativ kompakt ist, falls die folgenden Bedingungen alle erfüllt sind:

(i) Es existiert ein $t_0 \in [0,1]$ mit $\sup_{f\in A} |f(t_0)| < \infty$;

(ii) es gilt $\sup_{f\in A} |f'(t)| < \infty$ für alle $t \in [0,1]$;

(iii) $\forall\, t \in [0,1] \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{\varepsilon,t} > 0 \quad \forall\, s \in K(t, \delta_{\varepsilon,t}) \quad \forall\, f \in A\colon \quad |f'(t) - f'(s)| < \varepsilon.$

Aufgabe 17 (Lösungen von Anfangswertproblemen)

Seien $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a,b]$. Sei $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $\alpha > 0$ existiert genau eine Funktion $y_\alpha\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ mit
$$y_\alpha(t) = \begin{cases} y_0, & \text{falls } t \le a, \\ y_0 + \int_a^t f(s, y_\alpha(s-\alpha))\,\mathrm{d}s, & \text{falls } a < t \le b, \end{cases}$$
für alle $t \in (-\infty, b]$.

b) Die Menge $H := \{y_\alpha|_I\colon \alpha > 0\}$ ist relativ kompakt in $C(I)$.

c) Das Anfangswertproblem
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \text{für } t \in I, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$
besitzt eine Lösung.

Aufgabe 18 - K (Kompakte Operatoren)

Sei $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt.

a) Sei $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass die Einbettung $C^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ kompakt ist.

b) Sei Ω konvex mit $\mathring{\Omega} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Einbettung $C^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ kompakt ist.

c) Sei $\gamma \in (0,d)$ und $m\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ eine beschränkte und messbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$Kf(x) := \int_\Omega \frac{m(x,y)}{|x-y|^\gamma} f(y)\,\mathrm{d}y, \quad f \in L^2(\Omega), x \in \Omega,$$
einen kompakten Operator auf $L^2(\Omega)$ definiert.