KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
4. Dezember 2015

Funktionalanalysis
7. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 11. Dezember 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 19 - K (Konvergenz von Operatorfolgen)

Seien X, Y und Z Banachräume, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(Y,Z)$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X,Y)$. Seien außerdem $T \in B(Y,Z)$ und $S \in B(X,Y)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n y = Ty \quad \text{für alle } y \in Y \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n x = Sx \quad \text{für alle } x \in X.$$

Seien außerdem (M,d) ein metrischer Raum, $f\colon M \to X$ stetig und $F\colon M \to B(X,Y)$ *stark stetig*, d.h. für jedes $x \in X$ ist die Funktion $F(\cdot)x\colon M \to Y$, $t \mapsto F(t)x$, stetig. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Falls $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ für ein $y \in Y$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} T_n y_n = Ty$.

b) Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ für ein $x \in X$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} T_n S_n x_n = TSx$.

c) Die Funkion $F(\cdot)f(\cdot)\colon M \to Y$, $t \mapsto F(t)f(t)$ ist stetig.

d) Für jede kompakte Menge $K \subseteq Y$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \|T_n y - Ty\|_Z = 0.$$

Aufgabe 20 (Bilineare Operatoren)

Seien X, Y und Z Banachräume und $B\colon X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung, d.h. $B(x,\cdot)$ und $B(\cdot,y)$ sind lineare Abbildungen für alle $x \in X$ bzw. $y \in Y$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Die Abbildung B ist stetig.

b) Die Abbildungen $B(x,\cdot)\colon Y \to Z$ und $B(\cdot,y)\colon X \to Z$ sind stetig für alle $x \in X$ bzw. $y \in Y$.

c) Die Abbildung B ist stetig in $(0,0)$.

d) Es existiert ein $M > 0$ mit $\|B(x,y)\| \le M\|x\|\|y\|$ für alle $(x,y) \in X \times Y$.

Aufgabe 21 - K (Der Satz von Szegö)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$S_n\colon C[a,b] \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f(x_k^{(n)}),$$

wobei $x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \in [a,b]$ paarweise verschiedene Punkte sind und $a_0^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

a) $S_n \in (C[a,b])'$ mit $\|S_n\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$
für jedes $f \in C[a,b]$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es existiert eine dichte Menge $D \subseteq C[a,b]$, sodass (1) für alle $f \in D$ gilt.

(ii) Es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}| < \infty$.