KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
18. Dezember 2015

Funktionalanalysis

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 8. Januar 2016, 13:30 Uhr

Aufgabe 25 - K (Eigenschaften des Spektrums)

Seien X und Y Banachräume und $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ abgeschlossen.

a) Sei $V\colon Y \to X$ ein Isomorphismus und $B := V^{-1}AV$ mit Definitionsbereich $D(B) := \{y \in Y\colon Vy \in D(A)\}$. Zeigen Sie, dass $B\colon D(B) \subseteq Y \to Y$ abgeschlossen ist mit $\sigma(A) = \sigma(B)$.

b) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $B := \lambda I + \mu A$ mit $D(B) = D(A)$. Zeigen Sie, dass
$$\sigma(B) = \lambda + \mu\sigma(A).$$

c) Sei $\lambda \in \rho(A)$. Zeigen Sie, dass $\|R(\lambda, A)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))}$.

Aufgabe 26 - K (Multiplikationsoperatoren)

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $m \in C(\Omega)$, $X = C_b(\Omega)$ und $Af = mf$ mit $D(A) = \{f \in X\colon mf \in X\}$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist und bestimmen Sie $\sigma(A)$.

b) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $p \in [1, \infty]$, $m\colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und $X = L^p(\Omega, \mu)$. Auf X betrachten wir den Operator $Bf = mf$ für $f \in D(B) = \{f \in X\colon mf \in X\}$. Zeigen Sie, dass B abgeschlossen ist mit
$$\sigma(B) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \mu\big(|\lambda - m| < \delta\big) > 0 \text{ für alle } \delta > 0\big\}.$$

Aufgabe 27 (Integraloperator)

Auf $L^2[0,1]$ definieren wir den Operator
$$(Tf)(t) := \int_0^1 k(s,t)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1],$$
wobei $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch
$$k(s,t) := \begin{cases} (1-t)s, & t \geq s, \\ (1-s)t, & t < s. \end{cases}$$
Berechnen Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte von T.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $(Tf)'' = -f$ und $(Tf)(0) = (Tf)(1) = 0$ für $f \in L^2[0,1]$.

**Wir wünschen frohe Weihnachten
und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2016!**