KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 5. Februar 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Funktionalanalysis
14. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 12. Februar 2016, 13:30 Uhr

Aufgabe 40 (Annihilatoren)

Für einen normierter Vektorraum X und eine nichtleere Menge $A \subseteq X$ definieren wir den *Annihilator* von A durch

$$A^{\perp} := \{x' \in X' \colon \langle a, x' \rangle = 0 \quad \forall\, a \in A\}.$$

a) Sei $Y \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T \colon {X'}\big/{Y^{\perp}} \to Y', \quad T(x' + Y^{\perp}) = x'|_Y,$$

einen wohldefinierten isometrischen Isomorphismus definiert.

b) Sei $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie, dass der Operator

$$S \colon \left({X}\big/{Y}\right)' \to Y^{\perp}, \quad S(\varphi) = \varphi \circ Q,$$

einen wohldefinierten isometrischen Isomorphismus definiert, wobei $Qx = x + Y$ die Quotientenabbildung ist.

Aufgabe 41 - K (Schwache Konvergenz)

a) Sei X ein Banachraum, $x, x_n \in X$ und $x', x'_n \in X'$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Falls $x_n \overset{w}{\to} x$ und $x'_n \to x'$ in X', so gilt auch $x'_n(x_n) \to x'(x)$ für $n \to \infty$.

(ii) Falls $x_n \overset{w}{\to} x$ und $x'_n \overset{w^*}{\to} x'$, so gilt auch $x'_n(x_n) \to x'(x)$ für $n \to \infty$.

b) Sei $p \in (1, \infty)$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass für $f \in L^p(\Omega, \mu)$ und eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega, \mu)$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1) $f_n \to f$ für $n \to \infty$ in $L^p(\Omega, \mu)$;
2) $f_n \overset{w}{\to} f$ und $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 42 - K (Reflexivität)

a) Sei X ein reflexiver Banachraum und Y ein normierter Vektorraum, sodass X und Y isomorph sind. Zeigen Sie, dass dann auch Y ein reflexiver Banachraum ist.

b) Zeigen Sie, dass die Räume $C[0, 1]$, $L^1[0, 1]$ und $L^\infty[0, 1]$ nicht reflexiv sind.