Harmonische Analysis II
Wintersemester 2010/2011

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Institut für Analysis
Kaiserstr. 89, D – 76128 Karlsruhe, Germany
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Riesztransformationen und verwandte singuläre Integraloperatoren

Wir haben im letzten Semester in §9 die Hilberttransformation behandelt:

$$(Hf)(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{f(x)-f(y)}{y}\,dy, \quad x\in\mathbb{R},$$

für etwa $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dabei haben wir gezeigt

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{f}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Wir definieren zunächst als Analoga im $\mathbb{R}^n$ die *Riesztransformationen.*

1.1. Definition und Bemerkung: Für $j\in\{1,\dots,n\}$ und $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$W_j(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)\,dy.$$

Hierdurch wird eine temperierte Distribution $W_j\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert. Die Konstante ist

$$c_n := \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

(insbesondere ist $c_1 = \frac{\Gamma(1)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$).
Die *j-te Riesztransformation* von $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$(R_jf)(x) = W_j * f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Man schreibt dies auch als *"principle-value"-Integral*

$$= c_n\,\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,dy$$

(vgl. *Cauchy-Hauptwert*). Dies ist ein *singulärer Integraloperator*: Schreibt man nämlich (formal)

$$(R_jf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy,$$

so ist $K\notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung (zur Faltung oben): Für $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ kann man die Faltung $T*\varphi$ erklären durch

$$T*\varphi(x) := T(y\mapsto\varphi(x-y)), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Dabei beachte man, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y \mapsto \varphi(x-y)$ zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gehört, so dass $T * \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ wohldefiniert ist. Die so definierte Faltung ist konsistent zur Faltung mit Funktionen, etwa mit L^p-Funktionen ($1 \leq p \leq \infty$). Man kann zeigen, dass die Funktion $T * \varphi$ eine C^∞-Funktion ist, die auf natürliche Weise eine temperierte Distribution induziert. Wenn wir diese der Einfachheit halber wieder mit $T * \varphi$ bezeichnen, so gilt die gewohnte Formel

$$\widehat{T * \varphi} = \hat{\varphi}\,\hat{T}.$$

Beachte dabei, dass $\hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ multipliziert werden kann.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y)\,dy = \int_{|y| \geq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y)\,dy + \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1} \frac{y_j}{|y|^n} \frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{|y|}\,dy,$$

da $\int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\,dy = 0$. Ähnlich wie bei der Hilberttransformation konvergiert dieser Ausdruck für $\varepsilon \to 0$ gegen

$$\int_{|y| \geq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y)\,dy + \int_{|y| \leq 1} \frac{y_j}{|y|^n} \frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{|y|}\,dy.$$

Wir erhalten außerdem die Abschätzung

$$|W_j(\varphi)| \leq c_n \left[\int_{|y| \geq 1} |y|^{-(n+1)}\,dy\,\|y_j \varphi\|_\infty + \int_{|y| \leq 1} |y|^{1-n}\,dy\,\|\nabla \varphi\|_\infty \right],$$

womit $W_j \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gezeigt ist. □

1.2. Satz: Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Beweis. Wir berechnen $\widehat{W_j}$. Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{W_j}(\varphi) = W_j(\hat{\varphi}) &= c_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \hat{\varphi}(\xi) \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}\,d\xi \\
&= c_n \lim_{R \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq R} e^{-ix\xi} \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}\,d\xi\,dx.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq R} e^{-ix\xi} \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}\,d\xi &\overset{\text{Polarkoord.}}{=} \int_{S^{n-1}} \int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq R} \underbrace{e^{-irx\theta}}_{=\cos(rx\theta) - i\sin(rx\theta)} \frac{r}{r^{n+1}} r^{n-1}\,dr\,\theta_j\,d\theta \\
&= -i \int_{S^{n-1}} \int_\varepsilon^R \sin(rx\theta) \frac{dr}{r}\,\theta_j\,d\theta.
\end{aligned}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde benutzt, dass $\theta \mapsto \cos(rx\theta)\theta_j$ ungerade ist. Man beachte dabei, dass $x\theta = x \cdot \theta = x^t\theta$ ein Skalarprodukt zweier Elemente des $\mathbb{R}^n$ ist.

Nun gilt $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, also

$$\int_0^\infty \sin(rx\theta)\,\frac{dr}{r} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x\theta).$$

Wir erhalten wegen $\left|\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \leq 4$ mittels majorisierter Konvergenz

$$\widehat{W_j}(\varphi) = -i\frac{\pi}{2}c_n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(x\theta)\theta_j\, d\theta\, dx.$$

Noch zu zeigen ist also

$$\frac{\pi}{2}c_n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(x\theta)\theta_j\, d\theta = \frac{x_j}{|x|}. \tag{*}$$

Dazu verwenden wir das

Lemma: Sei $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ messbar mit

(i) m ist positiv homogen vom Grad 0, dh $m(\lambda x) = m(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$,

(ii) für alle $A \in O(n)$ gilt $m(Ax) = Am(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (dh m ist invariant unter allen orthogonalen Matrizen; $A \in O(n) :\Leftrightarrow AA^t = A^tA = I$).

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $m(x) = c\frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Wir wenden das Lemma an auf $m_j(x) := \int_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(x\theta)\theta_j\, d\theta$, dh auf

$$x \mapsto m(x) := \int_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(x^t\theta)\theta\, d\theta \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion m ist positiv homogen vom Grad 0, und für $A \in O(n)$ gilt mittels Substitution $\theta = A\eta$, $d\theta = d\eta$:

$$m(Ax) = \int_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(x^tA^t\theta)\theta\, d\theta = \int_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(\underbrace{x^tA^tA\eta}_{=x^t\eta})A\eta\, d\eta = Am(x).$$

Nach Lemma finden wir $c \in \mathbb{R}$ mit $m(x) = c\frac{x}{|x|}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} c = m_1(e_1) = \int_{S^{n-1}} |\theta_1|\, d\theta &= \int_{-1}^1 |s| \int_{\sqrt{1-s^2}S^{n-2}} d\varphi \frac{ds}{(1-s^2)^{1/2}} \\ &= \int_{-1}^1 |s|(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds\, |S^{n-2}| = \frac{2|S^{n-2}|}{n-1} \end{aligned}$$

wegen

$$\int_{-1}^{1} |s|(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds = 2\int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds = \int_0^1 (1-u)^{\frac{n-3}{2}}\, du = \int_0^1 u^{\frac{n-3}{2}}\, du = \frac{2}{n-1}.$$

Nun gilt für Einheitskugel B_l und Einheitssphäre S^{l-1} in $\mathbb{R}^l$:

$$|B_l| = \frac{\pi^{l/2}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)} \quad \text{und} \quad |S^{l-1}| = l|B_l| = \frac{l\pi^{l/2}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)} = \frac{2\pi^{l/2}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)/\frac{l}{2}} = \frac{2\pi^{l/2}}{\Gamma(l/2)},$$

also ist

$$\frac{2|S^{n-2}|}{n-1} = \frac{2(n-1)|B_{n-1}|}{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Wir vergleichen mit

$$\frac{\pi}{2}c_n = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}},$$

und (*) ist gezeigt. □

Beweis des Lemmas. Wegen der vorausgesetzten Homogenität reicht es, $x \in S^{n-1}$ zu betrachten. Setze $c := m_1(e_1)$ und $z := \begin{pmatrix} m_2(e_1) \\ \vdots \\ m_n(e_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sei $B \in O(n-1)$. Dann ist $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in O(n)$ und

$$\begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} = m(e_1) = m(Ae_1) = Am(e_1) = \begin{pmatrix} c \\ Bz \end{pmatrix}.$$

Also gilt $Bz = z$ für jedes $B \in O(n-1)$. Somit ist $z = 0$ und $m(e_1) = ce_1$.
Zu $x \in S^{n-1}$ finden wir $A \in O(n)$ mit $Ae_1 = x$. Es folgt

$$m(x) = m(Ae_1) = Am(e_1) = cAe_1 = cx,$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Ende 1.Vorl.

Nachtrag: Wir haben oben für ein Integral über die Sphäre S^{n-1} im Fall $n \geq 2$ die folgende Formel verwendet:

$$\int_{S^{n-1}} f(\theta_1, \theta')\, d\theta = \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-s^2}S^{n-2}} f(s, \theta')\, d\theta' \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

wobei wir $\theta = (\theta_1, \theta')$ schreiben mit $\theta_1 \in \mathbb{R}$ und $\theta' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (siehe Grafakos, Anhang D.2).

Nachtrag zur Faltung $\mathscr{S}' \times \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$: Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$T * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \widehat{T * \varphi} = \hat{\varphi}\widehat{T}.$$

Beweis. Man kann zeigen, dass $x \mapsto T * \varphi(x)$ stetig ist. Wegen $T \in \mathscr{S}'$ gibt es $C > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|T(\psi)| \leq C \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k} (1 + |y|^2)^{k/2} |\partial^\alpha \psi(y)|}_{=: p_k(\psi)}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt somit

$$\begin{aligned} |(T * \varphi)(x)| &= |T(\varphi(x - \cdot))| \\ &\leq C \sup_{y, |\alpha| \leq k} (1 + |y|^2)^{k/2} |\partial_y^\alpha \varphi(x - y)| \\ &\leq C p_k(\varphi) \sup_y (1 + |y|^2)^{k/2} (1 + |x - y|^2)^{-k/2}. \end{aligned}$$

Dabei gilt wegen

$$(1+|y|^2)^{1/2} \leq 1+|y| \leq 1+|x|+|x-y| \leq (1+|y|)(1+|x-y|) \leq 2(1+|y|^2)^{1/2}(1+|x-y|^2)^{1/2},$$

dass das letzte Supremum durch

$$(1 + |x|^2)^{k/2}$$

majorisiert wird. Für die stetige Funktion $x \mapsto T * \varphi(x)$ haben wir also die Abschätzung

$$|T * \varphi(x)| \leq C p_k(\varphi)(1 + |x|^2)^{k/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

so dass durch diese Funktion eine temperierte Distribution induziert wird. Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$\begin{aligned} \widehat{T * \varphi}(\psi) &= T * \varphi(\hat{\psi}) \\ &= \int T(\varphi(x - \cdot)) \psi(x)\, dx \\ &= T(y \mapsto \underbrace{\int \varphi(x - y) \hat{\psi}(x)\, dx}_{=(\sigma\varphi * \hat{\psi})(y)}), \end{aligned}$$

wobei hier ein $\mathscr{S}$-wertiges Integral gebildet wird (ohne Beweis). Nun gilt

$$\sigma\varphi * \hat{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sigma \mathscr{F}^2(\sigma\varphi * \hat{\psi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sigma \mathscr{F}(\widehat{\sigma\varphi} \mathscr{F}^2(\psi)) = \mathscr{F}(\hat{\varphi} \frac{1}{(2\pi)^n} \sigma \mathscr{F}^2 \psi) = \mathscr{F}(\hat{\varphi}\psi).$$

Also ist

$$\widehat{T * \varphi}(\psi) = T(\sigma\varphi * \hat{\psi}) = T(\mathscr{F}(\hat{\varphi}\psi)) = \widehat{T}(\hat{\varphi}\psi) = \hat{\varphi}\widehat{T}(\psi),$$

was zu zeigen war. $\square$

1.3. Homogene singuläre Integraloperatoren: Für eine Funktion $\Omega : S^{n-1} \to \mathbb{C}$, die über S^{n-1} integrierbar ist [wir schreiben dafür $\Omega \in L^1(S^{n-1})$] mit $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\, d\theta = 0$, sei

$$K_\Omega(x) := \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Die Funktion K_Ω ist positiv homogen vom Grad $-n$. Beachte, dass die Kerne von Hilbert- und Riesztranformation von dieser Gestalt sind. Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$W_\Omega(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} K_\Omega(x)\varphi(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq N} K_\Omega(x)\varphi(x)\, dx.$$

Dann gilt $W_\Omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Es gilt

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} K_\Omega(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^{n-1}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\, dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^{n+1}} |x| \varphi(x)\, dx.$$

Somit existiert der Limes $\varepsilon \to 0$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und wir erhalten die Abschätzung

$$|W_\Omega(\varphi)| \leq C_1 \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \|\nabla\varphi\|_\infty + C_2 \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \sum_j \|x_j \varphi(x)\|_\infty,$$

so dass $W_\Omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gezeigt ist. $\square$

Für $0 < \varepsilon < N$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$(T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f)(x) := \int_{\varepsilon \leq |y| \leq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$(T_\Omega^{(*)} f)(x) := \sup_{N>0} \sup_{0<\varepsilon<N} |(T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f)(x)|.$$

Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$(T_\Omega f)(x) := (W_\Omega * f)(x) = \lim_{N\to\infty, \varepsilon\to 0} T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x).$$

T_Ω ist ein singulärer Integraloperator und $T_\Omega^{(*)}$ der zugehörige Maximaloperator.

Bemerkung: Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $0 < \varepsilon < N$ gilt mittels Übergang zu Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \|T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f\|_p &\leq \int_{\varepsilon \leq |y| \leq N} \|f(\cdot - y)\|_p \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}\, dy \\ &= \|f\|_p \int_\varepsilon^N \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)|\, d\theta\, r^{-n} r^{n-1}\, dr \\ &= \|f\|_p \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \log(N/\varepsilon). \end{aligned}$$

1.4. Satz: Sei $n \geq 2$ und $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ mit $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\, d\theta = 0$. Die Fouriertransformierte $\widehat{W_\Omega}$ ist gegeben durch

$$\widehat{W_\Omega}(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\Big(\log \frac{1}{|\xi\theta|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(\xi\theta)\Big)\, d\theta \quad \text{für fast alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Die rechte Seite ist wohldefiniert. Dazu beachte man, dass für $\xi = r\eta$ mit $r > 0$ und $\eta \in S^{n-1}$ gilt

$$\log \frac{1}{|\xi\theta|} = \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{|\eta\theta|}$$

und dass $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{r}\, d\theta = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{S^{n-1}} \log \frac{1}{|\eta\theta|}\, d\eta\, d\theta &= \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{S^{n-1}} \log \frac{1}{|\eta_1|}\, d\eta\, d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)||S^{n-2}| \underbrace{\int_{-1}^{1} \log \frac{1}{|s|} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds}_{<\infty, \text{ da } n \geq 2}\, d\theta \\
&= C_n \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} < \infty,
\end{aligned}$$

also

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\eta\theta|}\, d\theta < \infty \quad \text{für fast alle } \eta \in S^{n-1}$$

nach Fubini.

Zum Beweis benötigen wir das folgende

1.5. Lemma: Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt für $0 < \varepsilon < N$:

$$\Big| \int_\varepsilon^N \frac{e^{-ira} - \cos r}{r}\, dr \Big| \leq 2 \Big| \log \frac{1}{|a|} \Big| + 4$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0, N \to \infty} \int_\varepsilon^N \frac{e^{-ira} - \cos r}{r}\, dr = \log \frac{1}{|a|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn} a.$$

Beweis von Satz 1.4. Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\widehat{W_\Omega}(\varphi) = W_\Omega(\hat{\varphi}) = \lim_{N \to \infty, \varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq N} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} \hat{\varphi}(x)\, dx.$$

Wir verwenden Fubini und schreiben das Integral mittels Polarkoordinaten $x = r\theta$ um:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon \leq |x| \leq N} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} \hat{\varphi}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq N} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} e^{-ix\xi}\, dx\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \Big(\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_\varepsilon^N e^{-ir\theta\xi} \frac{dr}{r}\, d\theta \Big)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Wegen $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\, d\theta = 0$ und mit Polarkoordinaten $\xi = s\eta$ ist der Term in Klammern gleich

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_{\varepsilon}^{N} \frac{e^{-irs\theta\eta} - \cos(rs)}{r}\, dr\, d\theta = \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_{\varepsilon/s}^{N/s} \frac{e^{-ir\theta\eta} - \cos(r)}{r}\, dr\, d\theta.$$

Die Aussagen des Lemmas und majorisierte Konvergenz ergeben für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ Konvergenz gegen

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \Big(\log \frac{1}{|\theta\eta|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(\theta\eta) \Big)\, d\theta.$$

Nach obiger Bemerkung können wir hier wieder η durch ξ ersetzen und erhalten die Behauptung mittels majorisierter Konvergenz. □

Beweis des Lemmas. Nach dem Hauptsatz und Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{N} \frac{\cos(ra) - \cos r}{r}\, dr &= \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\cos(r|a|) - \cos r}{r}\, dr \\
&= -\int_{\varepsilon}^{N} \int_{1}^{|a|} \sin(tr)\, dt\, dr \\
&= -\int_{1}^{|a|} \int_{\varepsilon}^{N} \sin(tr)\, dr\, dt \\
&= -\int_{1}^{|a|} \frac{\cos(\varepsilon t)}{t}\, dt + \int_{N}^{N|a|} \frac{\cos t}{t}\, dt.
\end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen $\int_1^{|a|} dt/t = \log|a|$, das zweite Integral konvergiert für $N \to \infty$ gegen 0, da das Integral $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$ konvergiert. Wir erhalten außerdem die Abschätzung

$$\Big| \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\cos(ra) - \cos r}{r}\, dr \Big| \leq \Big| \int_{1}^{|a|} \frac{dt}{t} \Big| + \Big| \int_{N}^{N|a|} \frac{dt}{t} \Big| = 2 \Big| \log \frac{1}{|a|} \Big|.$$

Bekanntlich konvergiert $\int_{\varepsilon}^{N} \frac{\sin(ar)}{r}\, dr$ für $\varepsilon \to 0$ und $N \to \infty$ gegen $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$.

Weiter gilt für $0 \leq a \leq b \leq 1$:

$$\Big| \int_a^b \frac{\sin t}{t}\, dt \Big| \leq \int_a^b dt \leq 1,$$

sowie für $b \geq a \geq 1$:

$$\Big| \int_a^b \frac{\sin t}{t}\, dt \Big| = \Big| -\frac{\cos t}{t}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\cos t}{t^2}\, dt \Big| \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \leq 3.$$

Somit ist für $0 < \varepsilon < N$:

$$\Big| \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\sin(at)}{t}\, dt \Big| \leq 4.$$

Die Aussagen des Lemmas erhält man nun durch Betrachtung von Real- und Imaginärteil des Integranden. □

Aus 1.4 erhalten wir wegen der Bescharänktheit von $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \mathrm{sgn}\,(\xi\theta)\, d\theta$ sofort die folgende Charakterisierung der L^2-Beschränktheit. Ende 2.Vorl.

1.6. Theorem: Sei $n \geq 2$ und $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ mit $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\, d\theta = 0$. Dann ist $T_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ genau dann beschränkt, wenn gilt

$$\operatorname{ess}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \Big| \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{|\xi\theta|}\, d\theta \Big| = \operatorname{ess}\sup_{\eta\in S^{n-1}} \Big| \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{|\xi\eta|}\, d\theta \Big| < \infty.$$

Insbesondere ist $T_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, falls $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ ungerade ist (dh es gilt $\Omega(-\theta) = -\Omega(\theta)$). In diesem Fall verschwindet $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\, d\theta$, und da $\theta \mapsto \log \frac{1}{|\eta\theta|}$ gerade ist, verschwindet auch $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{|\eta\theta|}\, d\theta$ für jedes $\eta \in S^{n-1}$. In diesem Fall wollen wir Beschränktheit von T_Ω und $T_\Omega^{(*)}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$ zeigen. Das folgende dient dabei als Hilfsmittel für die sogenannte *Method of Rotations*.

1.7. Hilberttransformation in Richtung $\theta \in S^{n-1}$: Für $\theta \in S^{n-1}$ definieren wir

$$\mathcal{H}_\theta f(x) \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t\theta)\, \frac{dt}{t}, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Wir nennen $\mathcal{H}_\theta f$ die *Hilberttransformation von f in Richtung θ.*

Für $\theta = e_1$ ist

$$\mathcal{H}_{e_1} = H \otimes \mathrm{Id} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n),$$

wobei H die eindimensionale Hilberttransformation bezeichne ($\to$ letztes Semester). Also ist mit $x = (x_1, x')$ und $x_1 \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{e_1} f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Hf(\cdot, x')\|_p^p\, dx' \\ &\leq \|H\|^p_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x')|^p\, dx_1\, dx' = \|H\|^p_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

und $\|\mathcal{H}_{e_1}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}$.

Weiter gilt für jedes $A \in O(n)$:

$$(\mathcal{H}_{A(e_1)} f)(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{x - tAe_1}_{=A(A^{-1}x - te_1)})\, \frac{dt}{t} = (\mathcal{H}_{e_1}(f \circ A))(A^{-1}x). \tag{*}$$

Da man zu jedem $\theta \in S^{n-1}$ ein $A \in O(n)$ findet mit $Ae_1 = \theta$ und die Abbildungen $f \mapsto f \circ A$, $g \mapsto f \circ A^{-1}$ Isometrien in $L^p(\mathbb{R}^n)$ sind, gilt somit

$$\|\mathcal{H}_\theta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}, \quad \theta \in S^{n-1}.$$

Wir verfahren analog mit den zugehörigen Maximaloperatoren:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\le|t|\le N} f(x-t\theta)\,\frac{dt}{t},\\ \mathcal{H}_\theta^{(*)} f(x) &= \sup_{0<\varepsilon<N} |\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)} f(x)|.\end{aligned}$$

Wegen

$$\|\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\le|t|\le N} \|f(\cdot - t\theta)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \log N/\varepsilon$$

ist jeder Operator $\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt für $1\le p\le\infty$ und somit $|\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)} f(x)|<\infty$ für fast alle $x\in\mathbb{R}^n$.

Die Eigenschaft (*) gilt auch für die Operatoren $\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}$ und den Maximaloperator $\mathcal{H}_\theta^{(*)}$. Wie oben sieht man dann, dass für $1<p<\infty$ und jedes $\theta\in S^{n-1}$ der Operator $\mathcal{H}_\theta^{(*)}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist mit derselben Konstanten wie der Maximaloperator H_* der Hilberttransformation auf $L^p(\mathbb{R})$ (vgl. letztes Semester).

1.8. Theorem: Sei $\Omega\in L^1(S^{n-1})$ ungerade. Dann sind T_Ω und $T_\Omega^{(*)}$ für jedes $1<p<\infty$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt.

Beweis. Für $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $0<\varepsilon<N$ schreiben wir

$$\begin{aligned}T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) &= \int_{\varepsilon\le|t|\le N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\,dy\\ &= \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\int_\varepsilon^N f(x-r\theta)\,\frac{dr}{r}\,d\theta\\ &= -\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\int_\varepsilon^N f(x+r\theta)\,\frac{dr}{r}\,d\theta,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass Ω ungerade ist. Wir mitteln die beiden Darstellungen und erhalten

$$T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\int_\varepsilon^N \frac{f(x-r\theta)-f(x+r\theta)}{r}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)} f(x)\,d\theta, \tag{*}$$

sowie

$$T_\Omega^{(*)} f(x) \le \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)|(\mathcal{H}_\theta^{(*)} f)(x)\,d\theta.$$

Unter Verwendung von 1.6 ist dann

$$\|T_\Omega^{(*)} f\|_p \le \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} C_p \|f\|_p,$$

wobei C_p die Schranke von H_* in $L^p(\mathbb{R})$ sei. Nach dem Satz über Majorisierte Konvergenz können wir in (*) den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ durchführen und erhalten für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$T_\Omega f(x) = \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \mathcal{H}_\theta f(x) \, d\theta,$$

sowie schließlich die Abschätzung

$$\|T_\Omega f\|_p \leq \frac{\pi}{2} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \|H\|_{L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})} \|f\|_p.$$

Also sind T_Ω und $T_\Omega^{(*)}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. □

Bemerkung: Die Abschätzung für $T_\Omega^{(*)}$ zeigt (über dieselben Argumente wie für die Hilberttransformation im letzten Semester) auch, dass für $1 < p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ der Limes

$$T_\Omega f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0, N \to \infty} T_\Omega^{(\varepsilon, N)} f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert und dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0, N \to \infty} \|T_\Omega f - T_\Omega^{(\varepsilon, N)} f\|_p = 0$$

gilt. Dies gilt insbesondere für die Riesztranformationen R_j, deren Kerne ja ungerade und positiv homogen vom Grad $-n$ sind.

1.9. Anwendung: Helmholtzprojektion im $\mathbb{R}^n$: Sei

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^n)^n : \operatorname{div} f = 0\}$$

die Menge der divergenzfreien Vektorfelder in $L^p(\mathbb{R}^n)^n$ (div ist distributionell zu verstehen) und

$$G^p(\mathbb{R}^n) := \{g \in L^p(\mathbb{R}^n)^n : \exists T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \nabla T = g\}$$

die Menge der Gradienten in $L^p(\mathbb{R}^n)^n$. Der Raum $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)^n$. Man möchte $L^p(\mathbb{R}^n)^n$ als topologisch direkte Summe

$$L^p(\mathbb{R}^n)^n = L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G^p(\mathbb{R}^n)$$

schreiben und eine zugehörige stetige Projektion $\mathbb{P}_p : L^p(\mathbb{R}^n)^n \to L^p(\mathbb{R}^n)^n$ mit Bild $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ und Kern $G^p(\mathbb{R}^n)$ haben. Dies gelingt für $1 < p < \infty$.

Wir holen etwas aus und definieren den Raum

$$X_p := \{T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \nabla T \in L^p(\mathbb{R}^n)^n\} / \mathbb{C},$$

wobei $\ldots/\mathbb{C}$ bedeuten soll, dass nach den konstanten Funktionen faktorisiert wird. Dann ist die Abbildung $\nabla : X_p \to L^p(\mathbb{R}^n)^n$ injektiv mit Bild $G^p(\mathbb{R}^n)$, wir bezeichnen sie mit ∇_p.

Wir setzen $Y_p := (X_{p'})^*$ und betrachten die adjungierte Abbildung $(\nabla_{p'})^* : L^p(\mathbb{R}^n)^n \to Y_p$, die surjektiv ist. Wie man leicht sieht, ist $\nabla^* = -\mathrm{div}$, und somit ist die durchgezogene Abbildung $-\Delta : X_p \to Y_p$. Ist diese Abbildung bijektiv mit Inverser $(-\Delta)^{-1}$, so ist

$$Q := \nabla(-\Delta)^{-1}(-\mathrm{div}\,)$$

eine Projektion (dh es gilt $Q^2 = Q$) in $L^p(\mathbb{R}^n)^n$ mit Kern $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ und Bild $G^p(\mathbb{R}^n)$. Die gesuchte *Helmholtzprojektion* $\mathbb{P}_p$ erhält man dann als $\mathbb{P} = I - Q$.

Schreibt man den selbstadjungierten Operator $(-\Delta)^{-1}$ als

$$(-\Delta)^{-1} = (-\Delta)^{-1/2}(-\Delta)^{-1/2} = (-\Delta)^{-1/2}\Big((-\Delta)^{-1/2}\Big)^*,$$

so erhält man

$$Q = \nabla(-\Delta)^{-1/2}\Big(\nabla(-\Delta)^{-1/2}\Big)^*.$$

Hierbei ist $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ der Spaltenvektor mit Einträgen $-R_j$ und $(\nabla(-\Delta)^{-1/2})^*$ der Zeilenvektor mit Einträgen $(-R_k)^* = R_k$. Konkret führt dies zur Darstellung

$$\mathbb{P}(f_j) = \Big(f_j + \sum_{k=1}^n R_j R_k f_k\Big)_{j=1}^n.$$

Am besten weist man über die Fouriertransformation nach, dass das Bild von $\mathbb{P}$ gerade $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ ist.

Ende 3.Vorl.

In den Anwendungen des Satzes von Mikhlin über Fouriermultiplikatoren im letzten Semester war die Funktion $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ in der Regel positiv homogen vom Grad 0 und C^∞. Wir zeigen nun, dass der zugehörige Operator $f \mapsto \mathscr{F}^{-1}(m\hat{f})$ dann ein homogener singulärer Integraloperator von der in 1.3 vorgestellten Form ist. Dazu holen wir zunächst etwas aus.

1.10. Homogene Distributionen: Eine temperierte Distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt *positiv homogen vom Grad* $\gamma \in \mathbb{R}$, falls für alle $\lambda > 0$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$T(\varphi(\lambda\cdot)) = \lambda^{-n-\gamma}T(\varphi).$$

Diese Definition mit derjenigen für Funktionen verträglich: Ist u positiv homogen vom Grad γ, so gilt

$$\lambda^\gamma \int_{R^n} u(x)\varphi(\lambda x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda x)\varphi(\lambda x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(y)\lambda^{-n}\,dy.$$

Beispiel: δ_0 ist positiv homogen vom Grad $-n$, denn

$$\delta_0(\varphi(\lambda\cdot)) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi) = \lambda^{-n-(-n)}\delta_0(\varphi).$$

Bemerkung: Sei $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ positiv homogen vom Grad γ. Dann ist $\hat{T}$ positiv homogen vom Grad $-n-\gamma$, und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\partial^\alpha T$ positiv homogen vom Grad $\gamma - |\alpha|$.

Beweis. Es gilt

$$\partial^\alpha T(\varphi(\lambda\cdot)) = (-1)^{|\alpha|}T(\lambda^{|\alpha|}(\partial^\alpha\varphi)(\lambda\cdot)) = (-1)^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\lambda^{-n-\gamma}T(\partial^\alpha\varphi) = \lambda^{-n-(\gamma-|\alpha|)}(\partial^\alpha T)(\varphi).$$

Wegen $\widehat{\varphi(\lambda\cdot)} = \lambda^{-n}\hat{\varphi}(\cdot/\lambda)$ gilt

$$\hat{T}(\varphi(\lambda\cdot)) = T(\widehat{\varphi(\lambda\cdot)}) = T(\lambda^{-n}\hat{\varphi}(\cdot/\lambda)) = \lambda^{-n+n+\gamma}T(\hat{\varphi}) = \lambda^{-n-(-n-\gamma)}\hat{T}(\varphi).$$

□

1.11. Satz: Sei $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ positiv homogen vom Grad 0 und C^∞. Dann gibt es $b \in \mathbb{C}$ und $\Omega \in C^\infty(S^{n-1})$ mit $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\,d\theta = 0$ so, dass

$$\mathscr{F}^{-1}(m) = b\delta_0 + W_\Omega$$

gilt.

Wie oben gesagt beachte man, dass nach dem Satz von Mikhlin aus dem letzten Semester die Funktion m hier ein L^p-Fouriermultiplikator für $1 < p < \infty$ ist.

Beweis. Setze $a := \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} m(\theta)\,d\theta$. Dann ist $m-a$ positiv homogen vom Grad 0, also $m - a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $m - a = \hat{u}$ für ein $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Da also $\hat{u}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine C^∞-Funktion und positiv homogen vom Grad 0 ist, ist nach dem folgenden Lemma 1.12 auch u in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine C^∞-Funktion. Außerdem ist u (als temperierte Distribution) nach 1.10 positiv homogen vom Grad $-n$. Setzen wir $\Omega := u|_{S^{n-1}}$, so gilt $\Omega \in C^\infty(S^{n-1})$ und wegen der Homogenität

$$u(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Wir zeigen $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\,d\theta = 0$: Sei dazu $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ radial (dh $\psi(x) = \widetilde{\psi}(|x|)$) mit $\operatorname{supp}\psi \subset \{1 < |x| < 2\}$ und $\psi \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\psi(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(\theta)}{r^n}\,d\theta\,\widetilde{\psi}(r)r^{n-1}\,dr \\ &= c_1(\psi)\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\,d\theta, \end{aligned}$$

wobei $c_1(\psi) \neq 0$. Andererseits ist $\mathscr{F}^{-1}\psi$ wegen

$$(\mathscr{F}^{-1}\psi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\psi(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \underbrace{\int_{S^{n-1}} e^{ir\theta\xi}\,d\theta}_{\text{hängt nur von } |\xi| \text{ ab!}} \widetilde{\psi}(r)r^{n-1}\,dr$$

auch radial und somit

$$\begin{aligned} u(\psi) &= \hat{u}(\mathscr{F}^{-1}\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} (m(\xi) - a)(\mathscr{F}^{-1}\psi)(\xi)\, d\xi \\ &= c_2(\psi) \int_{S^{n-1}} (m(\theta) - a)\, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\, d\theta = 0$ gezeigt.

Definiere nun $W_\Omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wie gehabt. Klar ist $W_\Omega = u$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Folglich gilt $\operatorname{supp}(W_\Omega - u) \subseteq \{0\}$ und somit $W_\Omega - u = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$. Da W_Ω und u positiv homogen vom Gard $-n$ sind, folgt $c_\alpha = 0$ für $|\alpha| \ge 1$, dh $W_\Omega - u = c_0\delta_0$. Nun gilt

$$m = \hat{u} + a = \hat{u} + a\widehat{\delta_0} = \widehat{W_\Omega} + (a - c_0)\widehat{\delta_0},$$

und $b := a - c_0$ gibt die Behauptung. $\square$

Nachtrag: Für ein $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist der *Träger* $\operatorname{supp} T$ definiert als

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} T &:= \mathbb{R}^n \setminus \{ x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 :\ T = 0 \text{ auf } B(x,r) \} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \{ x : \exists r > 0 \forall \varphi \in \mathscr{S} : \operatorname{supp}\varphi \subset B(x,r) \Rightarrow T(\varphi) = 0 \}. \end{aligned}$$

Somit bedeutet z.B. $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$, dass $T(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.12. Lemma: Sei $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $T = u$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wobei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ positiv homogen vom Grad 0 sei. Dann ist $\hat{u}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine C^∞-Funktion.

Hier wird mit u sowohl die (beschränkte!) C^∞-Funktion $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ als auch die von dieser Funktion induzierte Distribution in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Beweis. Sei $M \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| > M + n$. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \ge 2$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \le 1$. Setze

$$u_0 := (1 - \varphi)u, \quad u_\infty := \varphi u.$$

Die Distribution u_0 hat kompakten Träger, also ebenso die Distribution $\partial^\alpha u_0$. Somit gilt $\widehat{\partial^\alpha u_0} \in C^\infty$. Nach der Leibnizregel gilt

$$\partial^\alpha u_\infty = \sum_{\beta \le \alpha} \partial^{\alpha-\beta} u \partial^\beta \varphi = \varphi \partial^\alpha u + v,$$

wobei $\operatorname{supp} v \subset \{1 < |x| < 2\}$. Also ist auch $\hat{v} \in C^\infty$. Weiter ist $\varphi\partial^\alpha u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und wegen der vorausgesetzten Homogenität von u ist

$$(\partial^\alpha u)(x) = |x|^{-|\alpha|} (\partial^\alpha u)\Big(\frac{x}{|x|}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Folglich gilt

$$|(\varphi\partial^\alpha u)(x)| \leq \frac{C_\alpha}{(1+|x|)^{|\alpha|}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Da für $|\beta| \leq M$ somit $x \mapsto x^\beta(\varphi\partial^\alpha u)(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, haben wir $\widehat{\varphi(\partial^\alpha u)} \in C^M(\mathbb{R}^n)$. Wir haben also $\partial^\alpha u \in C^M(\mathbb{R}^n)$ gezeigt, und wegen

$$\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$$

ist dann (Übung!) $\hat{u} \in C^M(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. $\square$

2 Littlewood-Paley-Theorie

2.1. Littlewood-Paley-Zerlegung: Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| \leq 1/2$ und $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq 1$. Setze

$$\varphi(\xi) := \psi(\xi/2) - \psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $\operatorname{supp}\varphi \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ und

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \underbrace{\varphi(2^{-j}\xi)}_{=:\varphi_j(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wir nehmen außerdem an, dass $\psi \geq 0$ und $\varphi \geq 0$ gilt.

Ende 4.Vorl.

Es gilt $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \{|\xi| \leq 1\}$ und $\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \{2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$.

Wir schreiben für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} u_{-1} &:= \psi(D)u := \mathscr{F}^{-1}(\psi\hat{u}), \\ u_j &:= \varphi_j(D)u := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\hat{u}), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Beachte dabei, dass $\hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi\hat{u}, \varphi_j\hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es gilt dann

$$\widehat{\psi(D)u} = \psi\hat{u} = \widehat{\mathscr{F}^{-1}\psi} \cdot \hat{u} = \mathscr{F}\left((\mathscr{F}^{-1}\psi) * u\right),$$

also $\psi(D)u = (\mathscr{F}^{-1}\psi) * u$, wobei $\mathscr{F}^{-1}\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Man kann direkt zeigen, dass für $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $\rho * T$ eine C^∞-Funktion ist. Somit sind die u_j, $j \geq -1$, ebenfalls C^∞-Funktionen. Es gilt sogar mehr:

Die temperierten Distributionen $\psi\hat{u}$ und $\varphi_j\hat{u}$ haben beide kompakten Träger. Die inverse Fouriertransformation von $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger ist gegeben durch die Funktion

$$\mathscr{F}^{-1}T(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} T(\rho e^{i\xi(\cdot)}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\rho = 1$ auf einer Umgebung des Trägers von T. (Die Formel hängt nicht von der speziellen Wahl von ρ ab, das nur dazu dient, $\rho e^{i\xi(\cdot)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sicherzustellen. Hier immerhin ein formales Argument:

$$(\mathscr{F}^{-1}T)(\chi) = T(\mathscr{F}^{-1}\chi) = T\Big(\rho\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(\cdot)}\chi(\xi)\,d\xi\Big) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} T(\rho e^{i\xi(\cdot)})\chi(\xi)\,d\xi,$$

wobei man zur Rechtfertigung des letzten Gleichheitszeichens $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$-wertige Integrale betrachten müsste.)

Ersetzt man hier $\xi \in \mathbb{R}^n$ durch $\zeta \in \mathbb{C}^n$, so ist $\zeta \mapsto \mathscr{F}^{-1}T(\zeta)$ eine ganze Funktion in jeder Komponente ζ_k von ζ. In diesem Sinne sind also $\psi(D)u$ und $\varphi_j(D)u$ Einschränkungen von ganzen Funktionen, also insbesondere reell-analytisch.

Da die u_j, $j \geq -1$, durch Faltung mit L^1-Funktionen entstehen, gilt z.B. für jeden homogenen Banachraum X zudem: Ist $u \in X$, so auch $u_j \in X$ für $j \geq -1$.

Beispiele: $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $X = BUC(\mathbb{R}^n)$, $X = H_2^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$.

Außerdem gilt für $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dass $u_j \in BUC(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $j \geq -1$.

Weitere Notation:

$$S_j u := \sum_{k=-1}^{j-1} u_k = \psi(D)u + \sum_{k=0}^{j-1} \varphi_j(D)u = \psi(2^{-j}D)u, \quad j \geq 0.$$

Insbesondere ist also $S_0 u = u_{-1} = \psi(D)u$.

Konvergenz: Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt stets

$$u = \sum_{j=-1}^{\infty} u_j \quad \text{in } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

womit gemeint ist:

$$u(\rho) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=-1}^{N} u_j(\rho) = \lim_{j\to\infty} (S_j u)(\rho), \quad \rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Zum Beweis: Wegen

$$(S_j u)(\rho) = \mathscr{F}^{-1}(\psi(2^{-j}\cdot)\hat{u})(\rho) = \psi(2^{-j}\cdot)\hat{u}(\mathscr{F}^{-1}\rho)$$

ist nur zu zeigen, dass für jedes $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\psi(2^{-j}\cdot)\rho \to \rho \ (j \to \infty) \text{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Das lassen wir zur Übung (verwende die Leibniz-Regel).

2.2. Lemma (Fastorthogonalität): Es gilt

$$\frac{1}{2} \leq \psi(\xi)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi)^2 \leq 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

und für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{j=-1}^{\infty} \|f_j\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \leq 2 \sum_{j=-1}^{\infty} \|f_j\|_2^2. \tag{2}$$

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $a_{-1} := \psi(\xi)$, $a_j := \varphi_j(\xi)$ für $j \geq 0$. Nach Voraussetzung ist $a_j \geq 0$ für $j \geq -1$, also

$$\sum_{j\geq -1} a_j^2 \leq \Big(\sum_{j\geq -1} a_j \Big)^2 = 1$$

Da höchstens zwei der a_j von Null verschieden sind, gilt zudem

$$1 = \Big(\sum_{j\geq -1} a_j \Big)^2 \leq 2 \sum_{j\geq -1} a_j^2.$$

Also ist (1) gezeigt. Zum Beweis von (2) multipliziere man (1) mit $|\hat{f}(\xi)|^2$, integriere über den $\mathbb{R}^n$ und beachte

$$\|g\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{g}\|_2^2, \quad g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

□

2.3. Lemma (Ableitungen): (a) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ gibt es ein $C > 0$ so, dass für alle $j \geq 0$ gilt:

$$\frac{1}{C} 2^{js} \|u_j\|_2 \leq \|u_j\|_{H^s} \leq C 2^{js} \|u_j\|_2. \tag{1}$$

(b) Sei X ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$ oder $X = L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein $C > 0$ so, dass für alle $j \geq 0$ gilt:

$$\forall |\alpha| = k : \quad \|\partial^\alpha u_j\|_X \leq C 2^{jk} \|u\|_X, \quad \|\partial^\alpha S_j u\|_X \leq C 2^{jk} \|u\|_X. \tag{2}$$

und

$$\frac{1}{C} 2^{jk} \|u_j\|_X \leq \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u_j\|_X \leq C 2^{jk} \|u_j\|_X. \tag{3}$$

2.4. Folgerung (Charakterisierung der H_2^s-Räume): Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $C > 0$ mit

$$\frac{1}{C} \|u\|_{H_2^s}^2 \leq \sum_{j\geq -1} 2^{2js} \|u_j\|_2^2 \leq C \|u\|_{H_2^s}^2.$$

Beweis. Wie im Beweis von 2.2 sieht man ein, dass $\|u\|_{H_2^s}^2$ äquivalent ist zu $\sum_{j\geq -1} \|u_j\|_{H_2^s}^2$. Nach 2.3(a) ist dies äquivalent zu $\sum_{j\geq -1} 2^{2js} \|u_j\|_2^2$. □

Beweis von Lemma 2.3. (a) Wir verwenden

$$\|u_j\|_{H^s}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \varphi_j(\xi)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Auf $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \{2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$ gilt

$$\frac{1}{C} 2^{2js} \leq (1+|\xi|^2)^s \leq C 2^{2js},$$

Hieraus folgt (1).

(b) (i) **Beobachtung:** Sind $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \mathscr{F} L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi = \widetilde{\Phi}(\mu \cdot)$, wobei $\mu > 0$, so gilt $(\mathscr{F}^{-1}\Phi)(x) = \mu^{-n} (\mathscr{F}^{-1}\widetilde{\Phi})(x/\mu)$ und

$$\|\mathscr{F}^{-1}\Phi\|_1 = \|\mathscr{F}^{-1}\widetilde{\Phi}\|_1$$

unabhängig von μ. Folglich gilt

$$\|\mathscr{F}^{-1}\Phi * u\|_X \leq C \|u\|_X$$

mit $C = \|\mathscr{F}^{-1}\widetilde{\Phi}\|_1$ unabhängig von μ.

(ii) Insbesondere gilt (bei entsprechender Differenzierbarkeit) für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $k = |\alpha|$:

$$\partial^\alpha (\Phi(D)u) = (\partial^\alpha \mathscr{F}^{-1}\Phi) * u = \mu^{-k} \mu^{-n} (\partial^\alpha \mathscr{F}^{-1} \widetilde{\Phi})(\cdot/\mu) * u$$

und somit nach (i):

$$\|\partial^\alpha (\Phi(D)u)\|_X \leq \mu^{-k} \|\partial^\alpha (\mathscr{F}^{-1}\widetilde{\Phi})\|_1 \|u\|_X.$$

(iii) Anwendung auf $\Phi = \varphi(2^{-j}\cdot)$ bzw. $\Phi = \psi(2^{-j}\cdot)$ gibt (2).

(iv) Weiter gilt für $|\alpha| = k$:

$$\widetilde{\partial^\alpha u_j}(\xi) = i^k \xi^\alpha \varphi(2^{-j}\xi) \hat{u}(\xi) = i^k 2^{jk} (2^{-j}\xi)^\alpha \varphi(2^{-j}\xi) \hat{u}(\xi) = i^k 2^{jk} \widetilde{\Phi}(2^{-j}\cdot) \hat{u}_j(\xi),$$

wobei $\widetilde{\Phi}(\xi) := \xi^\alpha \chi(\xi)$ und $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi = 1$ auf $\operatorname{supp} \varphi$. Aus (i) folgt dann die rechte Ungleichung in (3).

(v) Zur linken Ungleichung in (3): Sei wieder $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi = 1$ auf $\operatorname{supp} \varphi$. Dann gilt

$$\varphi(\xi) = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha \chi_\alpha(\xi) \Big) \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\chi_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha \chi(\xi)}{\sum_{|\beta|=k} (\xi^\beta)^2} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Somit

$$\hat{u}_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \hat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} (2^{-j}\xi)^\alpha \chi_\alpha(2^{-j}\xi) \hat{u}_j(\xi) = i^{-k} 2^{-jk} \sum_{|\alpha|=k} \chi_\alpha(2^{-j}\xi) \widehat{\partial^\alpha u_j}(\xi),$$

und das heißt

$$2^{jk} u_j = i^{-k} \sum_{|\alpha|=k} 2^{jn} (\mathscr{F}^{-1}\chi_\alpha)(2^j \cdot) * \partial^\alpha u.$$

Die Ungleichung folgt also aus (i). $\square$

2.5. Lemma (zur Konvergenz der Reihe $\sum_{j\geq -1} u_j$): Ist X ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$ und $u \in X$, so konvergiert $(S_j u)$ in $\|\cdot\|_X$ gegen u. Für $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\forall g \in L^1(\mathbb{R}^n) : \langle S_j u, g\rangle \to \langle u, g\rangle \ (j \to \infty),$$

dh schwach*-Konvergenz der Reihe $\sum_{j\geq -1} u_j$ gegen u.

Beweis. Wie im Beweis von 2.3 gesehen ist

$$S_j u = \mathscr{F}^{-1}(\psi(2^{-j}\cdot)\hat{u}) = 2^{jn}(\mathscr{F}^{-1}\psi)(2^{-j}\cdot) * u,$$

und wegen $\mathscr{F}^{-1}\psi \in \mathscr{S} \subset L^1$ mit $\int \mathscr{F}^{-1}\psi = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\psi(0) = 1$ ist $\Big(2^{jn}(\mathscr{F}^{-1}\psi)(2^j\cdot)\Big)_{j\geq 0}$ eine Dirac-Folge. $\square$

Ende 5.Vorl.

2.6. Definition: Für $\gamma \in (0,1)$ sei

$$C^\gamma(\mathbb{R}^n) := \{u \in C_b(\mathbb{R}^n) : |u|_\gamma := \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty\}$$

(man kann hier auch $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ statt $C_b(\mathbb{R}^n)$ nehmen) der *Raum der Hölder-stetigen Funktionen mit Exponent* γ. Der Raum $C^\gamma(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|u\|_{C^\gamma} := \|u\|_\infty + |u|_\gamma.$$

2.7. Satz (Charakterisierung von $C^\gamma(\mathbb{R}^n)$): Sei $\gamma \in (0,1)$. Dann gilt:

(a) Es gibt eine Konstante $C > 0$ so, dass für alle $u \in C^\gamma(\mathbb{R}^n)$ und für jedes $j \geq -1$ gilt:

$$\|u_j\|_\infty \leq C\|u\|_{C^\gamma} 2^{-j\gamma}.$$

(b) Gilt $\sup_{j\geq -1} 2^{j\gamma}\|u_j\|_\infty < \infty$, so folgt $u \in C^\gamma(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|u\|_{C^\gamma} \leq C_\gamma \sup_{j\geq -1} 2^{j\gamma}\|u_j\|_\infty,$$

wobei C_γ nur von γ abhängt.

Beweis. (a) Es gilt

$$\|u_{-1}\|_\infty = \|\mathscr{F}^{-1}\psi * u\|_\infty \leq \|\mathscr{F}^{-1}\psi\|_1\|u\|_\infty.$$

Sei also $j \geq 0$. Es gilt

$$\int 2^{jn}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(2^j x)\,dx \overset{(x=2^{-j}y)}{=} \int (\mathscr{F}^{-1}\varphi)(y)\,dy = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(0) = \varphi(0) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} u_j(x) &= \int 2^{jn}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(2^j(x-y))u(y)\,dy \\ &= \int 2^{jn}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(2^j(x-y))(u(y)-u(x))\,dy. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|u_j\|_\infty &\leq \int 2^{jn}\left|(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(2^j(x-y))\right| |x-y|^\gamma\,dy\,|u|_\gamma \\ &\overset{z=2^j(x-y)}{=} |u|_\gamma 2^{-j\gamma}\int \left|(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(z)\right| |z|^\gamma\,dz. \end{aligned}$$

(b) OBdA gelte $\|u_j\|_\infty \leq 2^{-j\gamma}$ für alle $j \geq -1$. Zu zeigen ist $u \in C^\gamma(\mathbb{R}^n)$ und $\|u\|_{C^\gamma} \leq C_\gamma$. Wir schreiben für ein zu bestimmendes j_0:

$$u = S_{j_0}u + R_{j_0}u, \quad \text{wobei} \quad R_{j_0}u = \sum_{j\geq j_0} u_j$$

und die Reihe zunächst in $\mathscr{S}'$ zu verstehen ist. Es gilt aber

$$\sum_{j\geq j_0}\|u_j\|_\infty \leq \sum_{j\geq j_0} 2^{-j\gamma} \leq C_1 2^{-j_0\gamma}$$

(für jedes j_0). Also konvergiert $\sum_{j\geq -1} u_j$ gleichmäßig und es ist $u \in L^\infty$ (sogar $u \in C_b$, da jedes $u_j \in C^\infty$), sowie

$$\|R_{j_0}u\|_\infty \leq C_1 2^{-j_0\gamma}. \tag{*}$$

Weiter gilt nach Mittelwertsatz

$$|S_{j_0}u(x) - S_{j_0}u(y)| \leq |x-y|\sum_{j=-1}^{j_0-1}\|\nabla u_j\|_\infty.$$

Nach 2.3 haben wir

$$\|\nabla u_j\|_\infty \leq C_2 2^j 2^{-j\gamma}, \quad j \geq 0,$$

und offenbar auch $\|\nabla u_{-1}\|_\infty \leq C_3$. Somit gilt

$$|S_{j_0}u(x) - S_{j_0}u(y)| \leq \left(C_3 + C_2\sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{j(\gamma-1)}\right)|x-y| \leq C_4 2^{j_0(1-\gamma)}|x-y|, \tag{**}$$

da $\sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{j(1-\gamma)} = (2^{1-\gamma}-1)^{-1}((2^{1-\gamma})^j - 1)$ und $2^{1-\gamma} > 1$ wegen $\gamma \in (0,1)$. Aus (*) und (**) erhalten wir

$$|u(x) - u(y)| \leq C_4 2^{j_0(1-\gamma)}|x-y| + 2C_1 2^{-j_0\gamma}.$$

Die Idee ist, nun $2^{j_0} = |x-y|$ zu nehmen. Dazu überlegen wir zunächst

$$|u|_\gamma = \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq \sup_{0<|x-y|\leq 1} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} + 2\|u\|_\infty.$$

Wir haben $\|u\|_\infty$ oben schon abgeschätzt, betrachten also nur noch $|x-y|\leq 1$ und wählen $j_0 \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $2^{j_0} \leq \frac{1}{|x-y|}$. Dann ist $2^{j_0} \leq \frac{1}{|x-y|} \leq 2^{j_0+1}$ und

$$|u(x)-u(y)| \leq C_4|x-y|^{\gamma-1}|x-y| + 2C_1(2|x-y|)^\gamma = (C_4 + 2^{1+\gamma}C_1)|x-y|^\gamma = C_5|x-y|^\gamma.$$

$\square$

Bemerkung: Die Äquivalenz $\sup_{j\geq -1} 2^j\|u_j\|_\infty \approx \|u\|_{C_b^1}$ gilt nicht. Der Raum

$$\{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \sup_{j\geq -1} 2^j\|u_j\|_\infty\}$$

ist echt größer als $C_b^1(\mathbb{R}^n)$.

2.8. Theorem: Sei $1<p<\infty$. Dann gilt für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\Big(\sum_{j\geq -1}|f_j|^2\Big)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \frac{1}{C}\|f\|_p \leq \Big\|\Big(\sum_{j\geq -1}|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq C\|f\|_p,$$

wobei C nicht von f abhängt.

Zum Beweis von Theorem 2.8 definieren wir

$$S: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n, l^2), \quad f \mapsto (f_j)_{j\geq -1}.$$

Hier ist $l^2 = \{(a_j)_{j\geq -1} : a_j \in \mathbb{C}, \sum_{j\geq -1}|a_j|^2 < \infty\}$ mit Norm $\|(a_j)_j\|_{l^2} := (\sum_{j\geq -1}|a_j|^2)^{1/2}$. Der Raum l^2 ist ein Hilbertraum bzgl. dieser Norm. Die Abbildung S ist linear und es gilt

$$\begin{aligned}\|Sf\|_{L^p(l^2)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|Sf(x)\|_{l^2}^p\,dx\Big)^{1/p} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{j\geq -1}|f_j|^2\Big)^{p/2}dx\Big)^{1/p} \\ &= \Big\|\Big(\sum_{j\geq -1}|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1) S ist beschränkt $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n, l^2)$ (das ist klar nach 2.2).

2) S ist beschränkt $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ für alle $1<p<\infty$ durch Anwendung eines Satzes über singuläre Integraloperatoren imt operatorwertigen Kernen (s.u., dabei wird 1) benutzt).

3) Dualitätsargument für die Abschätzung nach unten.

Unter der Annahme von 2) bringen wir zunächst das Argument für 3):
Es gilt

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \sum_{j,k}\langle f_j, g_k\rangle = \sum_{|j-k|\le 1}\langle f_j, g_k\rangle \\ &= \sum_j \langle f_j, g_j\rangle + \sum_j \langle f_j, g_{j+1}\rangle + \sum_j f_j g_{j-1}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Big|\sum_j \langle f_j, g_{j+l}\rangle\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_j f_j\overline{g_{j+l}}\,dx\Big| \le \int \sum_j |f_j\overline{g_{j+l}}| \\ &\overset{\text{CSU}}{\le} \int \Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_j |g_j|^2\Big)^{1/2} dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \Big\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \|(\sum_j |g_j|^2)^{1/2}\|_{p'} \\ &\overset{2)}{\le} C\,\|f\|_p \Big\|\Big(\sum_j |g_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p'}\end{aligned}$$

Somit

$$\|g\|_{p'} = \sup_{f\in L^p, \|f\|_p\le 1} |\langle f, g\rangle| \le 3C\Big\|\Big(\sum_{j\ge -1}|g_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p'},$$

und das ist die Abschätzung nach unten.

2.9. Theorem: Seien X, Y Banachräume. Sei $r \in (1,\infty]$ und $T : L^r(\mathbb{R}^n, X) \to L^r(\mathbb{R}^n, Y)$ ein beschränkter linearer Operator mit Norm B. Sei $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to L(X,Y)$ messbar und in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ so, dass

$$(TF)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)F(y)\,dy$$

für alle $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, X)$ mit kompaktem Träger, der x nicht enthält. Genügt K der Hörmander-Bedingung

$$\int_{|x|\ge 2|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{X\to Y}\,dx \le A < \infty, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

so gilt

$$\|T(F)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,Y)} \le C_{n,p}(A+B)\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,X)}$$

für alle $F \in L^p(\mathbb{R}^n, X)$ und $1 < p < \infty$.

Bemerkung: Das ist die vektorwertige Version eines Satzes aus dem letzten Semester, wobei damals $r = 2$ und $B = \|\widehat{K}\|_\infty$ war. Der Beweis verläuft genauso wie dort (vgl. Grafakos Theorem 4.6.1).

2.10. Anwendung: Wir haben $Sf = (f_j)_{j\geq -1}$ mit

$$\begin{aligned} f_{-1} &= \psi(D)f = (\mathscr{F}^{-1}\psi) * f \\ f_j &= \varphi_j(D)f = (\mathscr{F}^{-1}\varphi_j) * f = 2^{jn}(\mathscr{F}-1\varphi)(2^j\cdot) * f, \quad j \geq 0, \end{aligned}$$

und $X = \mathbb{C}$, $Y = l^2$. Die stetigen linearen Abbildungen $\mathbb{C} \to l^2$ identifizieren wir mit l^2. Somit ist hier $K : \mathbb{R}^n \to l^2$ gegeben durch

$$K(x) = (K_j(x))_{j\geq -1} \quad \text{und} \quad K_j(x) = \begin{cases} (\mathscr{F}^{-1}\psi)(x) & ,j = -1 \\ 2^{jn}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(2^j x) & ,j \geq 0. \end{cases}$$

Wir müssen also abschätzen

$$\int_{|x|\geq 2|y|} \Big(\sum_{j\geq -1} |K_j(x-y) - K_j(x)|^2 \Big)^{1/2} dx. \tag{*}$$

Wir tun das unter der Voraussetzung: Ende 6.Vorl.

$$|\mathscr{F}^{-1}\psi(x)| + |\mathscr{F}^{-1}\varphi(x)| + |\nabla\mathscr{F}^{-1}\psi(x)| + |\nabla\mathscr{F}^{-1}\varphi(x)| \leq C(1+|x|)^{-n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Da $\mathscr{F}^{-1}\psi, \mathscr{F}^{-1}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt, findet man ein entsprechendes $C > 0$.

Wir beginnen mit der Abschätzung des Integranden für $|x| \geq 2|y|$. Für $j = -1$ ist

$$\begin{aligned} |K_{-1}(x-y) - K_{-1}(x)| &\leq |y| \int_0^1 |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\psi)(x-ty)|\, dt \\ &\leq C|y| \int_0^1 (1+|x-ty|)^{-n-1}\, dt \\ &\leq C|y|(1+|x|/2)^{-n-1}, \end{aligned}$$

da $|x-ty| \geq |x| - t|y| \geq |x| - |y| \geq |x|/2$. Für $j \geq 0$ gilt mit demselben Argument:

$$\begin{aligned} |K_j(x-y) - K_j(x)| &\leq 2^{jn}2^j|y| \int_0^1 |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(2^j(x-ty))|\, dt \\ &\leq C|y| \int_0^1 (1+2^j|x-ty|)^{-n-1}\, dt \\ &\leq C|y|(1+2^{j-1}|x|)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} |K_{-1}(x-y) - K_{-1}(x)| &\leq |\mathscr{F}^{-1}\psi(x-y)| + |\mathscr{F}^{-1}\psi(x)| \\ &\leq C(1+|x-ty|)^{-n-1} + C(1+|x|)^{-n-1} \\ &\leq 2C(1+|x|/2)^{-n-1}, \end{aligned}$$

da $|x-y|, |x| \geq |x|/2$. Genauso folgt

$$\begin{aligned} |K_j(x-y) - K_j(x)| &\leq |2^{jn}\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^j(x-y))| + |2^{jn}\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^j x)| \\ &\leq 2C2^{jn}(1+2^{j-1}|x|)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Nimmt man das geometrische Mittel aus beiden Abschätzungen, so erhält man:

$$|K_j(x-y) - K_j(x)| \leq C_1|y|^{1/2}2^{j(n+1/2)}(1+2^{j-1}|x|)^{-n-1}, \quad j \geq -1,$$

für $|x| \geq 2|y|$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{j\geq -1}|K_j(x-y) - K_j(x)|^2\Big)^{1/2} \leq \sum_{j\geq -1}|K_j(x-y) - K_j(x)| \\ \leq\ & C \sum_{j\geq -1, 2^{j-1}|x|\leq 1} 2^{j(n+1)}|y| + C_1 \sum_{j\geq -1, 2^{j-1}|x|>1} |y|^{1/2}2^{j(n+1/2)}(1+2^{j-1}|x|)^{-n-1} \end{aligned}$$

Die erste Summe ist nun

$$\leq C_2|y|\Big(\frac{2}{|x|}\Big)^{n+1},$$

da $\sum_{j=-1}^{k}(2^{n+1})^j \leq C'2^{k(n+1)}$. Die zweite Summe hingegen ist

$$\begin{aligned} &\leq C_1|y|^{1/2} \sum_{j\geq -1, 2^{j-1}|x|>1} 2^{j(n+1/2)}(2^{j-1}|x|)^{-n-1} \\ &= C_1|y|^{1/2}|x|^{-n-1} \sum_{j\geq -1, 2^j>2/|x|} (\underbrace{2^{n+1/2-n-1}}_{=2^{-1/2}})^j \\ &\leq C_3|y|^{1/2}|x|^{-n-1}(2/|x|)^{-1/2} = C_4|y|^{1/2}|x|^{-n-1/2}. \end{aligned}$$

Wir haben den Integranden also abgeschätzt durch

$$C_5\Big(|y||x|^{-n-1} + |y|^{1/2}|x|^{-n-1/2}\Big), \quad |x| \geq 2|y|.$$

Für $\alpha \in \{1/2, 1\}$ gilt nun mittels Polarkoordinaten und der Substitution $r = s|y|$:

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |y|^\alpha|x|^{-n-\alpha}\,dx = c_n|y|^\alpha \int_{2|y|}^\infty r^{-n-\alpha}r^{n-1}\,dr = c_n|y|^{\alpha-\alpha-1}|y| \int_2^\infty s^{-1-\alpha}\,ds = c_{n,\alpha}$$

unabhängig von $|y| \neq 0$. Damit ist (*) gezeigt und Theorem 2.8 ist bewiesen.

Ähnlich kann man zeigen, dass, wenn man $\varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi)$ auch für $j < 0$ setzt, unter denselben Voraussetzungen an φ gilt:

$$\frac{1}{C_p}\|f\|_p \leq \Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\varphi_j(D)f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq C_p\|f\|_p.$$

Dabei beachte man

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Wir geben eine analoge Abschätzung für kontinuierliche Quadratfunktionen an. Zum Verständnis beachte man, dass (zumindest formal)

$$\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \, \frac{dt}{t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \underbrace{\int_{2^j}^{2^{j+1}} |\phi(tD)f|^2 \, \frac{dt}{t}}_{\approx |\phi(2^jD)f|^2(2^{j+1}-2^j)/2^j = |\phi(2^jD)f|^2},$$

so dass die folgende Abschätzung zur Version mit $\sum_{j\in\mathbb{Z}}$ "passt".

2.11. Theorem: Sei $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ so, dass für geeignete Konstanten $C, \varepsilon > 0$ gilt

$$|k(x)| + |\nabla k(x)| \le C(1 + |x|)^{-n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Es gelte $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\,dx = 0$. Setzt man $\phi := \hat{k}$, so gibt es zu jedem $p \in (1,\infty)$ eine Konstante $C_p > 0$ mit

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \, \frac{dt}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Zunächst halten wir fest:

$$\phi(tD)f = \mathscr{F}^{-1}(\phi(t\cdot)\hat{f}) = \mathscr{F}^{-1}(\phi(t\cdot)) * f = \underbrace{t^{-n}k(\cdot/t)}_{=:K_t(\cdot)} * f.$$

Wenn die L^2-Abschätzung gezeigt ist (s.u.), können wir also wieder 2.9 anwenden. Dabei ist wie zuvor $X = \mathbb{C}$, hingegen nun

$$Y = L^2(0,\infty; \frac{dt}{t}).$$

Wir können die beschränkten linearen Operatoren $\mathbb{C} \to Y$ wieder mit Y identifizieren und haben für die Hörmanderbedingung

$$\int_{|x|\ge 2|y|} \|t \mapsto K_t(x-y) - K_t(x)\|_{L^2(0,\infty;\frac{dt}{t})} \, dx$$

durch eine von $|y| \neq 0$ unabhängige, endliche Konstante abzuschätzen. Das machen wir wie in 2.10. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} |K_t(x-y) - K_t(x)| &= t^{-n}|k(\frac{x-y}{t}) - k(\frac{x}{t})| \\ &\le t^{-n-1}|y| \int_0^1 \Big|(\nabla k)\Big(\frac{x-sy}{t}\Big)\Big| \, ds \le Ct^{-n-1}|y|\Big(1 + \frac{|x|}{2t}\Big)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$|K_t(x-y)-K_t(x)| \le t^{-n}\Big(\Big|k\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big|+\Big|k\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big|\Big) \le 2Ct^{-n}\Big(1+\frac{|x|}{2t}\Big)^{-n-1}.$$

Als geometrisches Mittel beider Abschätzungen erhalten wir

$$|K_t(x-y)-K_t(x)| \le C_1 t^{-n-1/2}|y|^{1/2}\Big(1+\frac{|x|}{2t}\Big)^{-n-1}.$$

Zur Abschätzung des Integrals schreiben wir

$$\int_0^\infty |K_t(x-y)-K_t(x)|^2\,\frac{dt}{t} = \int_0^{|x|/2}\ldots + \int_{|x|/2}\ldots$$

Das erste Integral ist

$$\le C_2\int_0^{|x|/2} t^{-2n-1}|y||x|^{-2n-2}t^{2n+2}\,\frac{dt}{t} = C_2|y|\int_0^{|x|/2} dt\,|x|^{-2n-2} = C_3|y||x|^{-2n-1}.$$

Das zweite Integral hingegen ist

$$\le C_4\int_{|x|/2}^\infty (t^{-n-1}|y|)^2\,\frac{dt}{t} = C_5|y|^2|x|^{-2n-2}.$$

Wie in 2.10 haben wir somit die Abschätzung

$$\|t\mapsto K_t(x-y)-K_t(x)\|_{L^2(0,\infty;\frac{dt}{t})} \le C_6\Big(|y||x|^{-n-1}+|y|^{1/2}|x|^{-n-1/2}\Big),\quad |x|\ge 2|y|.$$

Wie dort erhält man eine Konstante C_7 mit

$$\int_{|x|\ge 2|y|}\|t\mapsto K_t(x-y)-K_t(x)\|_{L^2(0,\infty;\frac{dt}{t})}\,dx \le C_7,\quad |y|\neq 0.$$

Damit ist die Hörmanderbedingung gezeigt.

Bisher haben wir die Bedingung $\int k\,dx = 0$ noch nicht verwendet. Wir brauchen sie nun beim Beweis der L^2-Beschränktheit.

Ende 7.Vorl.

Dazu schreiben wir mittels Fubini und Plancherel:

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_2^2 &= \int_0^\infty \|\phi(tD)f\|_2^2\,\frac{dt}{t}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \|\phi(t\cdot)\hat f\|_2^2\,\frac{dt}{t}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |\phi(t\xi)|^2\,\frac{dt}{t}\,|\hat f(\xi)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

Also reicht zu zeigen, dass es $C > 0$ gibt mit

$$\int_0^\infty |\phi(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \leq C$$

für fast alle $x \in\in \mathbb{R}^n$. Schreibt man $\xi = r\theta$ mit $r > 0$, $\theta \in S^{n-1}$, so zeigt die Substitution $t = s/r$:

$$\int_0^\infty |\phi(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |\phi(s\theta)|^2 \frac{ds}{s},$$

und wir müssen nur $\xi = \theta \in S^{n-1}$ betrachten.
Für $j = 1, \dots, n$ gilt $\widehat{\partial_j k}(\xi) = i\xi_j \phi(\xi)$, also

$$|\phi(\xi)| \leq \|\nabla k\|_1 \min\{1/|\xi_j|\} \leq C'/|\xi|, \quad \xi \neq 0,$$

da $\nabla k \in L^1$ nach Voraussetzung. Andererseits ist $\phi(0) = \int k\, dx = 0$ und somit

$$|\phi(\xi)| = |\phi(\xi) - \phi(0)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\xi} - 1||k(x)|\, dx.$$

Dabei ist

$$|e^{-ix\xi} - 1| \leq \left| \int_0^{x\xi} e^{-is}\, ds \right| \leq |x\xi|,$$

also nach Dreiecksungleichung

$$|e^{-ix\xi} - 1| \leq \min\{|x\xi|, 2\} \leq 2|x\xi|^{1/2}.$$

Wir erhalten somit

$$|\phi(\xi)| \leq 2C \int_{\mathbb{R}^n} |x\xi|^{1/2}(1 + |x|)^{-n-1}\, dx = |\xi|^{1/2} \underbrace{2C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{1/2}(1 + |x|)^{-n-1}\, dx}_{=:C''}.$$

Für $\theta \in S^{n-1}$ ist also $|\phi(t\theta)|^2 \leq C_3 \min\{t, t^{-2}\}$ und

$$\int_0^\infty |\phi(t\theta)|^2 \frac{dt}{t} \leq C''' \int_0^\infty \min\{1, t^{-3}\} \frac{dt}{t} =: C_2^2 < \infty.$$

Wir haben gezeigt:

$$\left\| \left(\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_2 \leq C_2 \|f\|_2$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Bemerkung: Gilt in der Situation von 2.11 zusätzlich

$$\int_0^\infty |\phi(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \geq c^2 \quad \text{für fast alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $c > 0$ ist, so gibt es zu jedem $p \in (1, \infty)$ eine Konstante $c_p > 0$ mit

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \, \frac{dt}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_p \geq c_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Der zweite Teil des Beweises zeigt dies für $p = 2$ und $c_2 := c$. Für $p \neq 2$ braucht man wieder ein Dualitätsargument.

2.12. Spezialfälle: (a) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $u(t,x)$ die zuhörige Lösung der Wärmeleitungsgleichung, definiert für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ (engl.: *caloric extension*), dh

$$u(t,x) = (G_t * f)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $G_t(x) = t^{-n/2} G(x/\sqrt{t})$ und

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi)^n}} e^{-|x|^2/4}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |t\Delta u(t,x)|^2 \, \frac{dt}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_p \approx \|f\|_p. \tag{*}$$

Zum Beweis von (*) setzen wir $k(x) := (\Delta G)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, insbesondere genügen k und ∇k den Abschätzungen aus Theorem 2.11. Außerdem gilt hier $\phi(\xi) = \hat{k}(\xi) = -|\xi|^2 e^{-|\xi|^2}$, so dass $\int k \, dx = \phi(0) = 0$. Wir können Theorem 2.11 also anwenden.

Zudem ist hier mittels der Substitutionen $t = s/(\sqrt{2}|\xi|)$ und $s = \sqrt{r}$ für $\xi \neq 0$:

$$\int_0^\infty |\phi(t\xi)|^2 \, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^4 |\xi|^4 e^{-2t^2|\xi|^2} \, \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \int_0^\infty s^4 e^{-s^2} \, \frac{ds}{s} = \frac{1}{8} \int_0^\infty r e^{-r} \, dr = \frac{1}{8}.$$

Insbesondere ist somit

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \, \frac{dt}{t} \Big) \Big\|_2^2 = \frac{1}{8} \|f\|_2^2,$$

woraus durch Polarisation[1] folgt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (\phi(tD)f)(x) \overline{(\phi(tD)g)(x)} \, \frac{dt}{t} \, dx.$$

Nun kann man das Dualitätsargument durchführen und erhält

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \, \frac{dt}{t} \Big) \Big\|_p \approx \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

[1] Die Polarisationsformel gestattet es, das Skalarprodukt aus dem Quadrat der Norm zu rekonstruieren (→ Funktionalanalysis).

für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Schließlich bemerken wir noch

$$\int_0^\infty |\phi(tD)f|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |t^2 \Delta u(t^2, x)|^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_0^\infty |s\Delta u(s,x)|^2 \frac{ds}{s}$$

mittels Substitution $t = \sqrt{s}$. Damit ist (*) gezeigt.

(b) Ähnlich ist der Beweis von

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |t\nabla(P_t * f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_p \approx \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{**}$$

für $p \in (1, \infty)$. Hierbei ist $P_t(x) = t^{-n} P(x/t)$ und P der Poissonkern

$$P(x) = c_n (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei c_n so, dass $\int P\, dx = 1$. Es gilt $\hat{P}(\xi) = e^{-|\xi|}$, also $\widehat{\partial_j P}(\xi) = i\xi_j e^{-|\xi|}$ und $\widehat{\nabla P}(\xi) = \xi e^{-|\xi|} =: \phi(\xi)$. Hier hat ϕ Werte in $\mathbb{C}^n$. Die Kerne $k_j := \partial_j P$ genügen den Abschätzungen aus den Voraussetzungen von Theorem 2.11. Weiter gilt

$$\int_0^\infty |\phi(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \int_0^\infty t^2 |\xi|^2 e^{-2t|\xi|} \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}$$

so dass wir

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty |\phi(tD) f|^2 \frac{dt}{t} \Big) \Big\|_2^2 = \frac{1}{4} \|f\|_2^2$$

erhalten und das Dualitätsargument durchführen können.

Für $\partial_t P_t * f$ statt $\nabla P_t * f$ kann man genauso argumentieren. (Die Funktion $(t, x) \mapsto (P_t * f)(x)$ heißt manchmal *harmonic extension* von f).

3 Der Hardy-Raum H^1 und BMO

3.1. Definition: Sei $1 \leq p \leq \infty$. Eine messbare Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt (p)-*Atom*, falls es ein kompaktes Intervall I gibt mit

(i) $\operatorname{supp} a \subset I$,

(ii) $(|I|^{-1} \int_I |a(x)|^p \, dt)^{1/p} \leq |I|^{-1}$ für $1 \leq p < \infty$ bzw. $\|a\|_\infty \leq |I|^{-1}$ für $p = \infty$,

(iii) $\int_I a(x) \, dx = 0$.

Bemerkung: Für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt: Ist a ein (q)-Atom, so ist a auch ein (p)-Atom und es gilt $\|a\|_1 \leq 1$.

3.2. Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar. Dann definieren wir $f \in H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ durch: es gibt eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von (∞)-Atomen so, dass $\sum_k |c_k| < \infty$ und $f = \sum_k c_k a_k$ in $L^1(\mathbb{R})$. Die Norm in $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ wird definiert durch

$$\|f\|_{H^1_{\text{at}}} := \inf\{\sum_{k=1}^\infty |c_k| : \text{zu } (c_k) \text{ gibt es Folge } (a_k) \text{ von } (\infty)\text{-Atomen mit } f = \textstyle\sum_k c_k a_k \text{ in } L^1\}.$$

Bemerkung: Ist (c_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\sum_k |c_k| < \infty$ und (a_k) eine Folge von (∞)-Atomen, so gilt

$$\sum_k \|c_k a_k\|_1 = \sum_k |c_k| \|a_k\|_1 \leq \sum_k |c_k| < \infty,$$

so dass die Reihe $\sum_k c_k a_k$ absolut in $L^1(\mathbb{R})$ konvergiert.

Außerdem ist mittels monotoner Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_k |c_k a_k| \, dx = \sum_k \|c_k a_k\|_1 \leq \sum_k |c_k| < \infty,$$

so dass $\sum_k |c_k a_k| < \infty$ fast überall und die Reihe $\sum_k c_k a_k$ auch punktweise fast überall konvergiert. Für messbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt dann:

$$\sum_{k=1}^N c_k a_k \to f \ (N \to \infty) \text{ in } \|\cdot\|_1 \iff \sum_{k=1}^N c_k a_k \to f \ (N \to \infty) \text{ punktweise f.ü.}$$

Ebenfalls äquivalent dazu ist $\sum_{k=1}^N c_k a_k \to f$ für $N \to \infty$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ende 8.Vorl.

3.3. Satz: $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ ist bzgl. $\|\cdot\|_{H^1_{\text{at}}}$ ein Banachraum, und es gilt $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ mit $nnfL^1 \leq \|f\|_{H^1_{\text{at}}}$ für alle $f \in H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$.

Bemerkung: $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$ ist **nicht dicht** in $L^1(\mathbb{R})$, da

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } f \in H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$$

gilt.

Beweis. Wir führen das Problem auf ein Resultat der abstrakten Funktionalanalysis zurück. Sei $\mathcal{A} :=$ Menge der (∞)-Atome und

$$l^1(\mathcal{A}) := \{(c_a)_{a\in\mathcal{A}} : \sum_{a\in\mathcal{A}} |c_a| < \infty\}$$

(hier ist implizit enthalten, dass höchstens für abzählbar viele $a \in \mathcal{A}$ gilt $c_a \neq 0$). Dann ist $l^1(\mathcal{A})$ ein Banachraum bzgl. der durch

$$\|(c_a)_{a\in\mathcal{A}}\|_{l^1(\mathcal{A})} := \sum_{a\in\mathcal{A}} |c_a|$$

gegebenen Norm (das geht wie für $l^1(\mathbb{N})$). Die Abbildung

$$S : l^1(\mathcal{A}) \to L^1(\mathbb{R}), \quad (c_a)_{a\in\mathcal{A}} \mapsto \sum_{a\in\mathcal{A}} c_a a$$

ist linear und stetig. Also ist $\operatorname{Kern} S$ ein abgeschlossener Teilraum von $l^1(\mathcal{A})$. An der Definition der Quotientennorm und an der Definition von $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$ sieht man, dass die faktorisierte Abbildung

$$\widehat{S} : l^1(\mathcal{A})/\operatorname{Kern} S \to H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$$

eine bijektive Isometrie ist. Da $l^1(\mathcal{A})/\operatorname{Kern} S$ vollständig ist, gilt dies auch für $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$. $\square$

3.4. Illustration: Haar-Wavelet: Sei $h := 1_{[0,1/2)} - 1_{[1/2,1)}$ (h hat als Träger $[0,1]$ und ist $= 1$ auf der linken Hälfte und $= -1$ auf der rechten Hälfte). Definiere für $j,k \in \mathbb{Z}$ die Funktion $h_{j,k}$ durch

$$h_{j,k} := 2^{k/2} h(2^k x - j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $\operatorname{supp} h_{j,k} = [2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)] =: I$ mit $\|h_{j,k}\|_2 = 1$, wobei $h_{j,k}$ auf der rechten Hälfte von I den Wert $2^{k/2}$ und auf der linken Hälfte von I den Wert $-2^{k/2}$ annimmt. Wir bezeichnen die Funktion $h_{j,k}$ auch einfach mit h_I. Beachte, dass $|I| = 2^{-k}$ gilt und dass j,k durch Angabe von I eindeutig bestimmt sind. Wir bezeichnen Intervalle der Form $[2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)]$ mit $j,k \in \mathbb{Z}$ als *dyadische Intervalle*. Sei $\mathscr{D}_k$ die Menge der dyadischen Intervalle der Länge 2^{-k} und $\mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_k$ die Menge aller dyadischen Intervalle.

Satz: Die Menge $\{h_I : I \in \mathscr{D}\}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$. Insbesondere gilt für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{I\in\mathscr{D}} \langle f, h_I\rangle h_I \quad \text{in } \|\cdot\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^2}^2 &= \sum_{I\in\mathscr{D}} |\langle f, h_I\rangle|^2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die $h_{j,k}$ sind so skaliert, dass ihre L^2-Norm $= 1$ ist. Setzt man $\widetilde{h}_{j,k} := 2^{k/2}h_{j,k} = 2^k h(2^k x - j)$, so ist $\|\widetilde{h}_{j,k}\|_1 = 1$ und $\widetilde{h}_{j,k}$ ist ein (∞)-Atom. Der Satz zeigt also insbesondere, dass – im Gegensatz zur Situation in $L^1(\mathbb{R})$ – der Raum $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt, da dies ja schon endliche Linearkombinationen von (∞)-Atomen tun. Zur Übung zeige man in Ergänzung zur Bemerkung nach 3.2, dass für $f \in H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ mit atomarer Darstellung $f = \sum_{k=1}^\infty c_k a_k$ gilt:

$$\sum_{k=1}^N c_k a_k \overset{N\to\infty}{\to} f \quad \text{bzgl. } \|\cdot\|_{H^1_{\text{at}}}.$$

Beweis. Es ist klar, dass $\{h_I : I \in \mathscr{D}\}$ ein ONS ist, denn für zwei verschiedene dyadische Intervalle $I, J \in \mathscr{D}$ mit $|I| \le |J|$ ist entweder $I \cap J$ eine Nullmenge oder $I \subset J$ mit $|I| < |J|$. Im zweiten Fall ist h_J auf I konstant, so dass in jedem Fall $\langle h_I, h_J\rangle = 0$ gilt.

Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den linearen Operator E_k durch

$$E_k(f) := \sum_{I\in\mathscr{D}_k} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy\, 1_I, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Den Mittelwert $\frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy$ von f auf I bezeichnen wir auch kurz mit f_I. Dabei gilt nach Hölder- oder Jensen-Ungleichung für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|E_k f\|_2^2 = \sum_{I\in\mathscr{D}_k} \left|\frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy\right|^2 |I| \le \sum_{k\in\mathscr{D}_k} \int_I |f(y)|^2 \frac{dy}{|I|} \cdot |I| = \|f\|_2^2,$$

also $E_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit Norm ≤ 1. Wir erhalten $E_k f \to f$, $E_{-k} f \to 0$ für $k \to \infty$ in $\|\cdot\|_2$ für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ (da dies für z.B. stetige f mit kompaktem Träger gilt und $\|E_k\| \le 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$). Diese Konvergenzen gelten auch punktweise f.ü., da dies wieder für stetige Funktionen mit kompaktem Träger gilt und punktweise f.ü. $|E_k f| \le Mf$ ist, wobei M der (unzentrierte) Hardy-Littlewood-Maximaloperator ist. Setzen wir nun $D_k f := E_k f - E_{k-1} f$, so haben wir also (Teleskop-Summe!)

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k f \quad \text{in } \|\cdot\|_2 \text{ für jedes } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Die Behauptung folgt, wenn wir gezeigt haben, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$D_k f = \sum_{J \in \mathscr{D}_{k-1}} \langle f, h_J \rangle h_J, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{+}$$

Zum Beweis seien $I \in \mathscr{D}_k$ und $J \in \mathscr{D}_{k-1}$ mit $I \subset J$ und $x \in I$. Sei $I' \in \mathscr{D}_k$ dasjenige Intervall mit $I \cup I' = J$. Dann gilt

$$(D_k f)(x) = f_I - f_J = f_I - \frac{1}{2}(f_I + f_{I'}) = \frac{1}{2}(f_I - f_{I'}).$$

Für den Fall, dass I die linke Hälfte von J ist, haben wir

$$\langle f, h_J \rangle h_J(x) = 2^{1-k} \Big(\int_I f - \int_{I'} f \Big) (1_I - 1_{I'})(x) = \frac{1}{2}(f_I - f_{I'}).$$

Für den Fall, dass I die rechte Hälfte von J ist, haben wir

$$\langle f, h_J \rangle h_J(x) = 2^{1-k} \Big(\int_{I'} f - \int_I f \Big) (1_{I'} - 1_I)(x) = -\frac{1}{2}(f_{I'} - f_I) = \frac{1}{2}(f_I - f_{I'}).$$

Somit ist (+) gezeigt, und die Behauptung folgt. □

Der folgende Satz besagt, dass man in der Definition von $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ genauso gut (2)-Atome statt (∞)-Atomen hätte nehmen können. Der Satz gilt entsprechend auch für (p)-Atome mit $1 < p < \infty$. Wir stellen den Beweis zurück.

3.5. Satz: Es gibt eine Konstante $C > 0$ so, dass für jedes (2)-Atom a Folgen (c_k) in $\mathbb{C}$ und (a_k) von (∞)-Atomen existieren mit $\sum_k |c_k| \leq C$ und $a = \sum_k c_k a_k$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Wir werden später sehen, dass $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ in manchen Situationen, in denen der Raum $L^1(\mathbb{R})$ gewisse Eigenschaften nicht hat, dessen Rolle übernehmen kann. Am anderen Ende der L^p-Skala verhalten sich etwa singuläre Integraloperatoren auch auf $L^\infty(\mathbb{R})$, dem Dualraum von $L^1(\mathbb{R})$, schlecht. Wir definieren nun den Raum $BMO(\mathbb{R})$, der in mancher Hinsicht die Rolle von $L^\infty(\mathbb{R})$ als Endpunkt der Skala übernehmen kann.

3.6. Definition: Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ setzen wir

$$\|f\|_{BMO} := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| \, dx,$$

wobei das Supremum über alle beschränkten Intervalle genommen wird und $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(y) \, dy$ den Mittelwert von f über I bezeichnet. Weiter definieren wir

$$BMO(\mathbb{R}) := \{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : \|f\|_{BMO} < \infty \}.$$

Bemerkung: (a) Es gilt $L^\infty(\mathbb{R}) \subset BMO(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_\infty$, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Für $f, g \in BMO(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $\|\alpha f\|_{BMO} = |\alpha| \|f\|_{BMO}$ und $\|f + g\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$, sowie

$$\|f\|_{BMO} = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C} : f = c \text{ f.ü.}$$

Der Raum $(BMO(\mathbb{R})/\{\text{konstante Funktionen}\}, \|\cdot\|_{BMO})$ ist ein Banachraum.

3.7. Satz: Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und $C > 0$. Wenn zu jedem beschränkten Intervall I ein $c_I \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c_I| \, dx \leq C,$$

so gilt $f \in BMO(\mathbb{R})$ und

$$\|f\|_{BMO} \leq 2C.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$|f_I - c_I| = \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(x) - c_I \, dx \right| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c_I| \, dx \leq C.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| \, dx \leq \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c_I| \, dx + \frac{1}{|I|} \int_I |f_I - c_I| \, dx \leq 2C.$$

□

Anwendung: Sei $f \in BMO(\mathbb{R})$. Setzt man $c_I := |f_I|$, so folgt aus

$$||f(x)| - |f_I|| \leq |f(x) - f_I|$$

und 3.7, dass $|f| \in BMO(\mathbb{R})$ gilt und $\||f|\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{BMO}$. Ende 9.Vorl.

3.8. Satz: Es gilt $(H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}))' = BMO(\mathbb{R})$ via $\langle g, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \, dx$.

Beweis. "$\supseteq$": Sei $g \in BMO(\mathbb{R})$. Dann existiert

$$T_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \, dx$$

für alle $f \in H^1_{\text{at}}$ mit endlicher atomarer Darstellung $f = \sum_{k=1}^N c_k a_k$. Wir bezeichnen die zu a_k gehrigen Intervalle mit I_k. Wegen $\int_{I_k} a_k \, dx = 0$ gilt

$$T_g(f) = \sum_{k=1}^N c_k \int_{I_k} g(x) a_k(x) \, dx = \sum_{k=1}^N c_k \int_{I_k} (g(x) - g_{I_k}) \, a_k(x) \, dx,$$

also

$$|T_g(f)| \le \sum_{k=1}^{N} |c_k| \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |g(x) - g_{I_k}|\, dx \cdot \underbrace{|I_k| \|a_k\|_\infty}_{\le 1} \le \sum_{k=1}^{N} |c_k| \|g\|_{BMO}.$$

Ist $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, so kann man genauso argumentieren und für jedes $f = \sum_{k=1}^\infty c_k a_k$ erhalten:

$$|T_g(f)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \|g\|_{BMO}.$$

Bildet man rechts das Infimum über alle atomaren Darstellungen von f, so erhält man

$$|T_g(f)| \le \|f\|_{H^1_{\text{at}}} \|g\|_{BMO}.$$

Ein allgemeines $g \in BMO(\mathbb{R})$ approximieren wir durch L^∞-Funktionen wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $P_n(z) := z$, wenn $|z| \le n$, und $P_n(z) := nz/|z|$, wenn $|z| > n$. Dann gilt $|P_n(z) - P_n(w)| \le |z - w|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$. Wir setzen $g_n := P_n \circ g$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $g_n \in L^\infty$ und für jedes beschränkte Intervall I:

$$|g_n(x) - P_n(g_I)| \le |g(x) - g_I|, \quad x \in I,$$

so dass aus 3.7 folgt: $\|g_n\|_{BMO} \le 2\|g\|_{BMO}$.

Ist nun wieder $f \in H^1_{\text{at}}$ mit endlicher atomarer Darstellung, so gilt via majorisierter Konvergenz $T_g(f) = \lim_{n\to\infty} T_{g_n}(f)$. Somit erhalten wir

$$|T_g(f)| = \lim_{n\to\infty} |T_{g_n}(f)| \le \limsup_{n\to\infty} \|g_n\|_{BMO} \|f\|_{H^1_{\text{at}}} \le 2\|g\|_{BMO} \|f\|_{H^1_{\text{at}}}.$$

Da die Menge aller f mit endlicher atomarer Darstellung in H^1_{at} dicht liegt, können wir T_g auf eindeutige Weise zu einem linearen stetigen Funktional in $(H^1_{\text{at}})'$ fortsetzen mit Norm $\le 2\|g\|_{BMO}$.

"$\subseteq$": Sei $T : H^1_{\text{at}} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Sei $K \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in L^2$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [-K, K]$ und $\int \varphi\, dx = 0$. Ist $\varphi \ne 0$, so ist $a := \frac{\varphi}{\sqrt{2K}\|\varphi\|_2}$ ein (2)-Atom:

$$\ldots$$

Also ist für die Konstante C aus 3.5: $\|a\|_{H^1_{\text{at}}} \le C$ (unabhängig von K und φ). Es folgt $\varphi \in H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ und

$$\|\varphi\|_{H^1_{\text{at}}} \le C\sqrt{2K}\|\varphi\|_2.$$

Somit ist T für jedes $K \in \mathbb{N}$ ein stetiges lineares Funktional auf

$$Y_K := \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \varphi \in [-K, K], \int \varphi = 0\}$$

bzgl. $\|\cdot\|_2$. Wir fassen Y_K als abgeschlossenen Teilraum von $L^2(-K,K)$ auf, der in $L^2(-K,K)$ die Kodimension 1 hat. Somit finden wir sukzessive Funktionen $g_K \in L^2(-K,K)$ mit

$$\int_{-K}^{K} g_K(x)\varphi(x)\,dx = T(\varphi), \quad \varphi \in Y_K,$$

sowie

$$\int_{-K}^{K} g_{K+1}(x)\,dx = \int_{-K}^{K} g_K(x)\,dx \quad \text{für } K \geq 1.$$

Dabei ist g_1 eindeutig bis auf eine additive Konstante, die g_K für $K \geq 2$ sind dann eindeutig bestimmt. Aus den beiden bestimmenden Eigenschaften folgt $g_{K+1}|_{[-K,K]} = g_K$ f.ü., so dass durch $g(x) := g_K(x)$, falls $|x| \leq K$, eine Funktion $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ definiert wird. Es gilt dann

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \bigcup_K Y_K.$$

Wir fixieren ein beschränktes Intervall I und haben

$$\begin{aligned} o_I &:= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I |g(x)-g_I|^2\,dx\Big)^{1/2} = \sup_{\varphi\in L^2(I),\|\varphi\|_2\leq 1} \Big|\int_I \frac{g(x)-g_I}{\sqrt{|I|}}\varphi(x)\,dx\Big| \\ &= \sup_{\varphi\in L^2(I),\|\varphi\|_2\leq 1} \Big|\int_I g(x)\frac{\varphi(x)-\varphi_I}{\sqrt{|I|}}\,dx\Big|, \end{aligned}$$

da

$$g_I \int_I \varphi\,dx = |I|^{-1}\int_I g\,dx \cdot \int_I \varphi\,dx = \int_I g\,dx\varphi_I.$$

Dabei gilt für $\varphi \in L^2(I)$ mit $\|\varphi\|_2 \leq 1$:

$$\operatorname{supp}\frac{\varphi - 1_I\varphi_I}{\sqrt{|I|}} \subseteq I, \quad \int \frac{\varphi - 1_I\varphi_I}{\sqrt{|I|}}\,dx = 0, \|\frac{\varphi - 1_I\varphi_I}{\sqrt{|I|}}\|_{L^2(I)} \leq \frac{2\|\varphi\|_2}{\sqrt{|I|}} \leq |I|^{-1/2},$$

so dass $a_\varphi := \frac{\varphi - 1_I\varphi_I}{2\sqrt{|I|}}$ ein (2)-Atom ist. Mit der Konstanten C aus 3.5 gilt dann wieder $\|a_\varphi\|_{H^1_{\text{at}}} \leq C$, und wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} o_I &= 2\sup_{\varphi\in L^2(I),\|\varphi\|_2\leq 1} \Big|\int_I g(x)a_\varphi(x)\,dx\Big| \\ &= 2\sup_{\varphi\in L^2(I),\|\varphi\|_2\leq 1} |T(a_\varphi)| \\ &\leq 2\|T\|_{(H^1_{\text{at}})'} \sup_{\varphi\in L^2(I),\|\varphi\|_2\leq 1} \|a_\varphi\|_{H^1_{\text{at}}} \leq 2C\|T\|_{(H^1_{\text{at}})'}. \end{aligned}$$

Nach Jensen ist dann $g \in BMO(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_{BMO} \leq 2C\|T\|_{(H^1_{\text{at}})'}$. □

Zur Beweisidee von 3.5. Sei $a \neq 0$ ein (2)-Atom und i kompaktes Intervall mit $\operatorname{supp} a \subset I$, $\|a\|_2 \leq |I|^{-1/2}$ und $\int a\,dx = 0$. Setze $b(x) := |I|a(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\|b\|_2^2 = |I|^2\|a\|_2^2 \leq |I|$.

Für jedes beschränkte Intervall J sei $2J$ das Intervall mit demselben Mittelpunkt, aber Länge $2|J|$. Setzen wir für $\alpha > 0$:

$$U_\alpha := \{x \in \mathbb{R} : M(|b(\cdot)|^2)(x) > \alpha^2\},$$

wobei M den unzentrierten Maximaloperator bezeichne, so gilt für $\alpha > \sqrt{2}$: $U_\alpha \subset 2I$ (hier ist etwas zu tun!). Sei nun $\alpha \geq \sqrt{2}$ und (I_j) sei die Menge der Zusammenhangskomponenten der offenen Menge U_α. Als nächstes sieht man für jedes j ein (!):

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \leq \Big(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |b(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \leq \alpha.$$

Setze nun $g_0(x) := \begin{cases} b(x) & , x \notin U_\alpha \\ b_{I_j} & , x \in I_j \end{cases}$ und $h_j := 1_{I_j}(b - b_{I_j})$ für jedes j. Dann gilt $b = g_0 + \sum_j h_j$. Dabei ist $\|g_0\|_\infty \leq \alpha$ (für $x \notin U_\alpha$ ist das der Differentiationssatz von Lebesgue, ansonsten gilt für jedes j:

$$|b_{I_j}| \leq \Big(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |b(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \leq \alpha.),$$

weiter $\operatorname{supp} g_0 \subset 2I$ (wegen $I_j \subset U_\alpha \subset 2I$ und $\operatorname{supp} b \subset I \subset 2I$) und schließlich $\int g_0\,dx = 0$ (wegen $\int b = 0$ und $\int h_j = 0$). Also ist $a_0 := \frac{1}{2\alpha|I|}g_0 = \frac{1}{\alpha|2I|}g_0$ ein (∞)-Atom. Wir setzen $c_0 := 2\alpha$.

Für jedes j gilt

$$\|h_j\|_{L^1(dx/|I_j|)} \leq \|h_j\|_{L^2(dx/|I_j|)} \leq \|b\|_{L^2(dx/|I_j|)} + \|g_0\|_{L^2(I_j,dx/|I_j|)} \leq 2\alpha.$$

Setzt man nun $b_j := \frac{1}{2\alpha}h_j$, so hat man

$$\operatorname{supp} b_j \subset I_j, \qquad \int b_j = 0, \qquad \|b_j\|_2^2 \leq |I_j|.$$

Wende jetzt den Schritt "aus b mache a_0, c_0 und die b_j" auf jedes der b_j an, etc.

In der Notation kürzen wir das Indextupel $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}$ mit $*$ ab und wenden den Schritt also an auf b_* mit zugehörigem Intervall I_*. Setze

$$U_\alpha(*) := \{x \in \mathbb{R} : M(|b_*(\cdot)|^2)(x) > \alpha\}$$

mit Zusammenhangskomponenten I_{*,j_n}. Setze $g_*(x) := \begin{cases} b_*(x) & , x \notin U_\alpha(*) \\ b_{I_{*,j_n}} & , x \in I_{*,j_n} \end{cases}$ und $h_{*,j_n} := 1_{I_{*,j_n}}(b - b_{I_{*,j_n}})$ für jedes j_n, sowie $a_* := \frac{1}{2\alpha|I_*|}g_*$, $b_{*,j_n} := \frac{1}{2\alpha}h_{*,j_n}$. Dann ist a_* ein (∞)-Atom.

Wir erhalten so

$$\begin{aligned} b &= g_0 + \sum_{j_0} h_{j_0} = g_0 + (2\alpha) \sum_{j_0} b_{j_0} = g_0 + (2\alpha) \sum_{j_0} (g_{j_0} + \sum_{j_1} h_{j_0 j_1}) \\ &= g_0 + (2\alpha) \sum_{j_0} g_{j_0} + (2\alpha)^2 \sum_{j_0 j_1} g_{j_0 j_1} + (2\alpha)^3 \sum_{j_0 j_1 j_2} g_{j_0 j_1 j_2} + \ldots + (2\alpha)^n \sum_{j_0 j_1 \cdots j_{n-1}} (g_* + \sum_{j_n} h_{*,j_n}). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \leq \|b_*\|_{L^2(I_{*,j_n}, dx/|I_{*,j_n}|)} \leq \alpha,$$

also

$$|U_\alpha(*)| = \sum_{j_n} |I_{*,j_n}| \leq \frac{2}{\alpha^2} \sum_{j_n} \|b_*\|^2_{L^2(I_{*,j_n})} \leq \frac{2}{\alpha^2} \|b_*\|_2^2.$$

Außerdem ist

$$\|h_{*,j_n}\|_1 \leq 2\alpha |I_{*,j_n}|.$$

Wir verwenden diese Ungleichungen, um das Restglied in $\|\cdot\|_1$ abzuschätzen: es ist

$$\begin{aligned} (2\alpha)^n \sum_{*,j_n} \|h_{*,j_n}\|_1 &\leq (2\alpha)^{n+1} \sum_{*,j_n} |I_{*,j_n}| \\ &\leq (2\alpha)^{n+1} \sum_{*} |U_\alpha(*)| \\ &\leq (2\alpha)^{n+1} \frac{2}{\alpha^2} \sum_{*} \|b_*\|_2^2 \\ &\leq (2\alpha)^{n+1} \frac{2}{\alpha^2} \sum_{*} |I_*| \end{aligned}$$

Diesen Schritt wiederholen wir jetzt noch n-mal und erhalten so

$$(2\alpha)^n \sum_{*,j_n} \|h_{*,j_n}\|_1 \leq (2\alpha)^{n+1} \Big(\frac{2}{\alpha^2}\Big)^{n+1} |I| = \Big(\frac{4}{\alpha^2}\Big)^{n+1}$$

Wir haben ebenfalls $\|g_*\|_1 \leq 2\alpha |I_*|$, was auf dieselbe Art und Weise zu

$$(2\alpha)^n \sum_{*} \|g_*\|_1 \leq (2\alpha) \Big(\frac{4}{\alpha}\Big)^n$$

führt. Die folgende Reihe konvergiert somit für $\alpha > 4$ in $\|\cdot\|_1$:

$$b = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((2\alpha)^n \sum_{j_0 \cdots j_{n-1}} g_{j_0 \cdots j_{n-1}} \Big).$$

Wir setzen nun noch $c_* = 2\alpha (2\alpha)^n |I_*|/|I|$ für $* = j_0 j_1 \ldots j_{n-1}$. Dann haben wir

$$a = \frac{1}{|I|} b = c_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{j_0 \cdots j_{n-1}} c_{j_0 \cdots j_{n-1}} \underbrace{a_{j_0 \cdots j_{n-1}}}_{(\infty)-\text{Atom}} \Big),$$

und wie oben zeigt man

$$\sum_{*} |c_*| \le (2\alpha)^{n+1} \sum_{*} |I_*|/|I| \le (2\alpha)\Big(\frac{4}{\alpha}\Big)^n,$$

so dass

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{*} |c_*| \le (2\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} (4/\alpha)^n = \frac{2\alpha}{1 - 4/\alpha} = \frac{2\alpha^2}{\alpha - 4}$$

folgt. □

Ende 10.Vorl.

3.9. Satz: Sei $r \in (1, \infty]$ und $T : L^r(\mathbb{R}) \to L^r(\mathbb{R})$ ein beschrnkter linearer Operator mit Norm B. Sei $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ so, dass

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y) f(y)\, dy$$

für alle $f \in L^\infty(R)$ mit kompaktem Träger, der x nicht enthält, und dass

$$\int_{|x| \ge 2|y|} |k(x-y) - k(x)|\, dx \le A < \infty, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dann gilt $T : H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ und $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to BMO(\mathbb{R})$ mit Norm $\le C_r(A+B)$, wobei C_r nur von r, aber nicht von A oder B abhängt.

Bemerkung: Im Fall $r < \infty$ ist $T : L^\infty \to BMO(\mathbb{R})$ als die eindeutig bestimmte schwach*-stetige Fortsetzung erklärt.

Beweis. Es reicht zu zeigen:

$$\|Ta\|_1 \le C_r(A+B) \tag{*}$$

für jedes (∞)-Atom a. Dann folgt für $f \in H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ mit atomarer Darstellung $f = \sum_k c_k a_k$:

$$\|Tf\|_1 \le \sum_k |c_k| \|Ta_k\|_1 \le C_r(A+B) \sum_k |c_k|,$$

also

$$\|Tf\|_1 \le C_r(A+B) \|f\|_{H^1_{\text{at}}}.$$

Zu (*): Sei a ein (∞)-Atom mit zugehörigem Intervall I. Wegen $a \in L^\infty$ mit $\operatorname{supp} a \subset I$ gilt $a \in L^r$, und Ta ist eine Funktion in L^r, insbesondere messbar, so dass $\|Ta\|_1 \in [0, \infty]$ wohldefiniert ist. Es gilt

$$\|Ta\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |Ta|\, dx = \int_{2I} |Ta|\, dx + \int_{\mathbb{R} \setminus 2I} |Ta|\, dx.$$

Nach Hölder ist

$$\begin{aligned}
\int_{2I} |Ta|\,dx &\le |2I|^{1-1/r}\|T\|_r \le 2^{1-1/r}|I|^{1-1/r}B\|a\|_r \\
&\le 2^{1-1/r}|I|^{1-1/r}B\underbrace{\|a\|_\infty}_{\le |I|^{-1}}|I|^{1/r} \le 2^{1-1/r}B.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term können wir wegen Translationsinvarianz ohne Einschränkung annehmen, dass $I=[-l,l]$ ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus 2I} |Ta|\,dx &= \int_{\mathbb{R}\setminus 2I} \Big|\int k(x-y)a(y)\,dy\Big|\,dx \\
(\text{wg. } \textstyle\int a = 0) \qquad &= \int_{\mathbb{R}\setminus 2I} \Big|\int (k(x-y)-k(x))a(y)\,dy\Big|\,dx \\
&\le \int_{|x|\ge 2l}\int_{|y|\le l} |k(x-y)-k(x)|\,|a(y)|\,dy\,dx \\
&\le \int_{|y|\le l}\underbrace{\int_{|x|\le 2|y|} |k(x-y)-k(x)|\,dx}_{\le A}\,|a(y)|\,dy \\
&\le A\|a\|_1 \le A.
\end{aligned}$$

Zur $L^\infty \to BMO$-Abschätzung: Die ist klar für $r=\infty$. Sei also $r<\infty$. Es ist $T' : L^{r'} \to L^{r'}$ mit Norm B. Für $f,g \in L^\infty$ mit kompakten Trägern und $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle T'g, f\rangle &= \langle g, Tf\rangle = \int g(x)\int k(x-y)f(y)\,dy\,dx \\
&= \int f(y)\int k(x-y)g(x)\,dx\,dy = \int f(x)\int k(y-x)g(y)\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Mit $\sigma k(z) := k(-z)$ ist also

$$(T'g)(x) = \int (\sigma k)(x-y)g(y)\,dy$$

für alle $g \in L^\infty$ mit kompaktem Träger, der x nicht enthält. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\ge 2|y|} |(\sigma k)(x-y)-(\sigma k)(x)|\,dx &= \int_{|x|\ge 2|y|} |k(y-x)-k(-x)|\,dx \\
&= \int_{|x|\ge 2|y|} |k(x+y)-k(x)|\,dx \le A
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung, so dass die Voraussetzung auch für $T', r', \sigma k$ statt T, r, k gilt. Nach dem bisher Gezeigten ist also $T' : H^1_{\text{at}} \to L^1$ mit Norm $\le C_r(A+B)$. Dualisieren gibt $T = (T')' : L^\infty \to BMO$. Beachte dabei, dass $T=(T')'$ schwach*-stetig und $L^{r'} \cap L^\infty$ schwach*-dicht in L^∞ ist. $\square$

Beispiel: $T = H$ Hilberttransformation, $r = 2$, $k(x) = \frac{1}{\pi x}$. Für $y \neq x \neq 0$ gilt

$$k(x-y) - k(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-y)x}.$$

Also ist für $y \neq 0$:

$$\int_{|x|\geq 2|y|} \frac{|y|}{|x-y||x|}\,dx \leq 2|y| \int_{|x|\geq 2|y|} |x|^{-2}\,dx = 4|y| \int_{2|y|}^{\infty} x^{-2}\,dx = 2.$$

Nach 3.9 gilt somit $H : H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ und $H : L^\infty(\mathbb{R}) \to BMO(\mathbb{R})$.

Es gilt viel allgemeiner die

3.10. Folgerung (Mikhlin): Sei $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und

$$\sup_{\xi \neq 0} |m(\xi)| + |\xi m'(\xi)| < \infty.$$

Dann gilt $T_m : H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ und $T_m : L^\infty(\mathbb{R}) \to BMO(\mathbb{R})$, wobei wieder $T_m f = \mathscr{F}^{-1}(m\hat{f})$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist.

Bemerkung: Die Abschätzung $T : H^1_{\text{at}} \to L^1$ ist eine Alternative zur schwachen $(1,1)$-Abschätzung aus dem letztem Semester. Ist zusätzlich $T : L^r \to L^r$ beschränkt, so gibt ein Interpolationsresultat Beschränktheit $T : L^p \to L^p$ für alle $p \in (1, r)$. Analog kann man zwischen $T : L^\infty \to BMO$ und $T : L^r \to L^r$ interpolieren und erhält $T : L^p \to L^p$ für alle $p \in (r, \infty)$.

Es gibt alternative Darstellungen des Hardyraumes.

3.11. Definition: Wir definieren den Hardyraum $H^1(\mathbb{R})$ durch

$$H^1(\mathbb{R}) := \{f \in L^1(\mathbb{R}) : Hf \in L^1(\mathbb{R})\}$$

mit Norm $\|f\|_{H^1} := \|f\|_1 + \|Hf\|_1$.

3.12. Bemerkung: (a) Es gilt $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$ und die Inklusion ist stetig.

(b) In der Situation von 3.10 gilt $T_m : H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R})$.

(c) Hat man eingesehen, dass $H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$ gilt, so folgt in der Situation von 3.10 sogar $T_m : H^1_{\text{at}}(\mathbb{R}) \to H^1_{\text{at}}(\mathbb{R})$ und $T_m : BMO(\mathbb{R}) \to BMO(\mathbb{R})$.

Beweis. (a) Für $f \in H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$ gilt $f \in L^1(\mathbb{R})$ nach 3.3. Außerdem gilt $Hf \in L^1(\mathbb{R})$ nach dem Beispiel nach 3.9 oder nach 3.10.

(b) Für $f \in H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$ gilt $T_m f \in L^1(\mathbb{R})$ nach 3.10. Nun ist $HT_m = T_{\tilde{m}}$ für $\tilde{m}(\xi) = -i\mathrm{sgn}\,(\xi)m(\xi)$, so dass nach 3.10 auch gilt $HT_m f = T_{\tilde{m}} f \in L^1(\mathbb{R})$. Damit ist $T_m f \in H^1(\mathbb{R})$ gezeigt. □

3.13. Beispiel: (a) Es gilt $L^\infty(\mathbb{R}) \neq BMO(\mathbb{R})$, da $x \mapsto \log|x| \in BMO(\mathbb{R}) \setminus L^\infty(\mathbb{R})$: Sei $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ ein Intervall und $c = c_I \in \mathbb{C}$. Dann gilt mittels Substitution $x = ry$:

$$\frac{1}{2r} \int_{x_0-r}^{x_0+r} |\log|x| - c|\, dx = \frac{1}{2} \int_{x_0/r-1}^{x_0/r+1} |\log|y| - (c - \log r)|\, dy,$$

so dass es reicht, $r = 1$ zu betrachten. Dafür machen wir eine Fallunterscheidung.

Ist $|x_0| \leq 2$, so setzen wir $c = 0$ und haben

$$\frac{1}{2} \int_{x_0-1}^{x_0+1} |\log|x||\, dx \leq \frac{1}{2} \int_{-3}^{3} |\log|x||\, dx =: C_1.$$

Ist $|x_0| > 2$, so setzen wir $c = \log|x_0|$ und haben mittels Substitution $x = |x_0|y$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x_0-1}^{x_0+1} |\log|x| - \log|x_0||\, dx &= \frac{|x_0|}{2} \int_{x_0/|x_0|-1/|x_0|}^{x_0/|x_0|+1/|x_0|} |\log|y||\, dy \\ = \quad \frac{|x_0|}{2} \int_{1-1/|x_0|}^{1+1/|x_0|} |\log|y||\, dy &\leq \frac{|x_0|}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|} \cdot \log 2 \\ = \quad \log 2 & \end{aligned}$$

Wir verwenden 3.5 und erhalten $\|\log|\cdot|\|_{BMO} \leq 2\max\{C_1, \log 2\}$. Ende 11.Vorl.

(b) Die Funktion $h := 1_{(0,\infty)} \log(1/\cdot)$ gehört nicht zu $BMO(\mathbb{R})$: Für $\varepsilon \in (0, 1/'')$ betrachten wir die Intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Für den Mittelwert gilt

$$h_{(-\varepsilon,\varepsilon)} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\varepsilon \log\frac{1}{x}\, dx = \frac{1 + \log(1/\varepsilon)}{2}.$$

Also haben wir

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h(x) - h_{(-\varepsilon,\varepsilon)}|\, dx \geq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} |h_{(-\varepsilon,\varepsilon)}|\, dx = \frac{1 + \log(1/\varepsilon)}{4} \to \infty \ (\varepsilon \to 0+).$$

Wir haben gesehen, dass die Funktion $f = \log|\cdot|$ in $BMO(\mathbb{R})$ liegt. Diese Funktion ist über jedes beschränkte Intervall exponentiell integrierbar. Dass eine solche Eigenschaft für jede BMO-Funktion gilt, besagen die John-Nirenberg-Ungleichungen.

3.14. Satz: Für alle $f \in BMO(\mathbb{R})$, alle beschränkten Intervalle I und alle $\alpha > 0$ gilt

$$|\{x \in I : |f(X) - f_I| > al\}| \leq C|I|e^{-\frac{\alpha}{2e\|f\|_{BMO}}},$$

wobei $C = e^{2e}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\|f\|BMO = 1$. Sei I Intervall und $b > 1$ (später setzen wir $b = e$). Wie bei der Calderón-Zygmund-Zelegung zerlegen wir $f - f_I$ in I mit dem Abbruchkriterium

$$\frac{1}{|J|}\int_J |f - f_I|\,dx > b. \qquad (*_1)$$

Für $J = I$ ist der Ausdruck links $\leq \|f\|_{BMO} = 1 < b$. Setze $I^{(0)} := I$ und teile $I^{(0)}$ in zwei Hälften. Wähle die mit $(*_1)$ aus und halbiere die anderen weiter etc. Das ergibt eine abzählbare Familie $(I_j^{(1)})$ mit

(A-1) $I_j^{(1)} \subset I^{(0)}$,

(B-1) $b < \frac{1}{|I_j^{(1)}|}\int_{I_j^{(1)}} |f - f_I|\,dx \leq 2b$,

(C-1) $|f_{I_j^{(1)}} - f_{I^{(0)}}| \leq 2b$,

(D-1) $\sum_j |I_j^{(1)}| \leq \frac{1}{b}\sum_j \int_{I_j^{(1)}} |f - f_{I^{(0)}}|\,dx \leq \frac{1}{b}|I^{(0)}|$,

(E-1) $|f - f_{I^{(0)}}| \leq b$ f.ü. auf $I^{(0)} \setminus \bigcup_j I_j^{(1)}$.

Dabei ist (A-1) klar. Die erste Ungleichung in (B-1) ist $(*_1)$, die zweite folgt daraus, dass vor dem letzten Teilungsschritt $(*_1)$ noch nicht erfüllt war. (C-1) folgt aus (B-1), ebenso die erste Ungleichung in (D-1). Für die zweite Ungleichung in (D-1) beachte man $\sum \int_{I_j^{(1)}} \leq \int_{I^{(0)}}$ und $\|f\|_{BMO} \leq 1$. (E-1) folgt aus dem Differentiationssatz von Lebesgue.

Für festes $I_j^{(1)}$ betrachtet man nun als Abbruchkriterium

$$\frac{1}{|J|}\int_J |f - f_{I_j^{(1)}}|\,dx > b. \qquad (*_2)$$

Halbiere $I_j^{(1)}$, wähle die Teilintervalle mit $(*_2)$ aus, halbiere die anderen weiter etc. Das ergibt eine abzählbare Familie $(I_l^{(2)})$ (wenn man das für jedes $I_j^{(1)}$ durchführt) mit Eigenschaften wie in (A-1) bis (E-1), wobei die oberen Indices (1), (0) durch (2), (1) zu ersetzen sind. Für festes $I_l^{(2)}$ betrachte dann

$$\frac{1}{|J|}\int_J |f - f_{I_l^{(2)}}|\,dx > b. \qquad (*_3)$$

als Abbruchkriterium und gelange genauso wie eben zu einer abzählbaren Familie $(I_s^{(3)})_s$ etc.

Wir erhalten so zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Familie $(I_j^{(k)})_j$ mit den Eigenschaften

(A-k) $I_j^{(k)} \subset I_{j'}^{(k-1)}$ für genau ein j',

(B-k) $b < \frac{1}{|I_j^{(k)}|} \int_{I_j^{(k)}} |f - f_{I_{j'}^{(k-1)}}| \, dx \leq 2b$,

(C-k) $|f_{I_j^{(k)}} - f_{I_{j'}^{(k-1)}}| \leq 2b$,

(D-k) $\sum_j |I_j^{(k)}| \leq \frac{1}{b} \sum_{j'} |I_{j'}^{(k-1)}|$,

(E-k) $|f - f_{I_{j'}^{(k-1)}}| \leq b$ f.ü. auf $I_{j'}^{(k-1)} \setminus \bigcup_j I_j^{(k)}$.

Dabei gilt (A-k) nach Konstruktion, (B-k) sieht man wie vorher ein (beachte, dass das Abbruchkriterium

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f - f_{I_{j'}^{(k-1)}}| \, dx > b. \tag{$*_k$}$$

für $J = I_{j'}^{(k-1)}$ nicht gilt). (C-k) folgt wieder aus (B-k), und (E-k) wieder aus dem Differentiationssatz von Lebesgue. Wir zeigen (D-k) (hierbei verwenden wir zuerst (B-k) und j' sei gemäß (A-k) passend zum jeweiligen j gewählt):

$$\begin{aligned}
\sum_j |I_j^{(k)}| &< \frac{1}{b} \sum_j \int_{I_j^{(k)}} |f - f_{I_{j'}^{(k-1)}}| \, dx \\
&\leq \frac{1}{b} \sum_{j'} \int_{I_{j'}^{(k-1)}} |f - f_{I_{j'}^{(k-1)}}| \, dx \\
&\leq \frac{1}{b} \sum_{j'} |I_{j'}^{(k-1)}| \underbrace{\|f\|_{BMO}}_{=1}.
\end{aligned}$$

Wende (D-l) für $l = k, k-1, \ldots, l = 1$ an:

$$\sum_j |I_j^{(k)}| \leq \frac{1}{b^k} |I^{(0)}|. \tag{+}$$

Wir leiten punktweise Abschätzungen wie in (E-k) her, aber für $|f - f_I|$: Kombination von (E-2) und (C-1) gibt

$$|f - f_{I^{(0)}}| \leq 3b \text{ f.ü. auf } I_j^{(1)} \setminus \textstyle\bigcup_l I_l^{(2)}.$$

Unter Verwendung von (E-1) folgt daraus

$$|f - f_I| \leq 2 \cdot 2b \text{ f.ü. auf } I^{(0)} \setminus \textstyle\bigcup_l I_l^{(2)}. \tag{F-2}$$

Für jedes feste l ist nach (E-3)

$$|f - f_{I_l^{(2)}}| \leq b \text{ f.ü. auf } I_l^{(2)} \setminus \textstyle\bigcup_s I_s^{(3)}.$$

Wegen (C-2) und (C-1) erhält man daraus

$$|f - f_{I^{(0)}}| \leq 3 \cdot 2b \text{ f.ü. auf } I_l^{(2)} \setminus \textstyle\bigcup_s I_s^{(3)},$$

so dass unter Verwendung von (F-2) folgt:

$$|f - f_I| \leq 3 \cdot 2b \text{ f.ü. auf } I^{(0)} \setminus \bigcup_s I_s^{(3)}. \tag{F-3}$$

So fortfahrend gelangt man zu

$$|f - f_I| \leq k \cdot 2b \text{ f.ü. auf } I^{(0)} \setminus \bigcup_j I_j^{(k)}, \tag{F-k}$$

was bedeutet:

$$\{x \in I : |f(x) - f_I| > 2bk\} \subset \bigcup_j I(k)_j \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Sei nun $\alpha > 0$. Falls $\alpha > 2b$ ist, wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $2kb < \alpha \leq 2(k+1)b$. Dann gilt nach (+) und unter Verwendung von $-k \leq 1 - \frac{\alpha}{2b}$:

$$\begin{aligned} |\{x \in I : |f(x) - f_I| > \alpha\}| &\leq |\{x \in I : |f(x) - f_I| > 2kb\}| \\ &\leq \sum_j |I_j^{(k)}| \leq \frac{1}{b^k}|I| = |I|e^{k \log b} \leq |I|be^{-\frac{\alpha \log b}{2b}}. \end{aligned}$$

Falls $\alpha \leq 2b$ ist, so haben wir

$$|\{x \in I : |f(x) - f_I| > \alpha\}| \leq |I| \leq |I|e^{2b}e^{-\alpha}.$$

Setze nun $b := e$, dann folgt die Behauptung. $\square$

3.15. Folgerung: Sei $f \in BMO(\mathbb{R})$. Dann gilt für jedes beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{|I|}\int_I e^{\gamma|f(x)-f_I|/\|f\|_{BMO}}\, dx \leq C_\gamma < \infty$$

für jedes $\gamma < \frac{1}{2e}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\gamma > 0$. Wir erinnern an die Formel

$$\int_I \varphi(|g|)\, dx = \int_0^\infty \varphi'(\alpha) d_g(\alpha)\, d\alpha$$

für wachsende und differenzierbare Funktionen φ, wobei

$$d_g(\alpha) = |\{x \in I : |g(x)| > \alpha\}|.$$

Wir wenden die Formel an auf $\varphi(\alpha) = e^\alpha$ und $g := \frac{\gamma}{\|f\|_{BMO}}|f - f_I|$ und verwenden 3.14 zue Abschätzung der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_I e^{\gamma|f(x)-f_I|/\|f\|_{BMO}}\, dx &\leq \int_0^\infty e^\alpha |\{x \in I : \frac{\gamma}{\|f\|_{BMO}}|f(x) - f_I| > \alpha\}|\, d\alpha \\ &\leq \int_0^\infty e^\alpha C e^{-\frac{\alpha\|f\|_{BMO}}{2e\gamma\|f\|_{BMO}}}\, d\alpha \\ &= C\int_0^\infty e^{\alpha(1-\frac{1}{2e\gamma})}\, d\alpha =: C_\gamma, \end{aligned}$$

wobei C_γ wegen $0 < 2e\gamma < 1$ endlich ist. $\square$

3.16. Folgerung: Für jedes $p \in (0, \infty)$ gibt es eine Konstante B_p mit

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|^p \, dx \right)^{1/p} \leq B_p \|f\|_{BMO}.$$

Beweis. Es gilt nach der Formel aus dem Beweis von 3.15 und nach 3.4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|^p \, dx &= \frac{p}{|I|} \int_0^\infty \alpha^{p-1} |\{x \in I : |f(x) - f_I| > \alpha\}| \, d\alpha \\ &\leq \frac{p}{|I|} C|I| \int_0^\infty \alpha^{p-1} e^{-\frac{\alpha}{2e\|f\|_{BMO}}} \, d\alpha \\ &= B_p \|f\|_{BMO}^p, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\alpha = \|f\|_{BMO} \beta$ substituiert haben. □

3.17. Folgerung: Für jedes $1 < p < \infty$ gilt:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|^p \, dx \right)^{1/p} \approx \|f\|_{BMO}.$$

Bemerkung: Man kann also in der Definition von $BMO(\mathbb{R})$ auch von L^p_{loc}-Funktionen ausgehen, für welche die linke Seite endlich ist. Beachte, dass wir im Beweis von 3.8 implizit gezeigt haben, dass dies für $p = 2$ möglich ist. Ende 12.Vorl.

3.18. Definition: Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ sei die *scharfe Maximalfunktion* (*sharp maximal function*) $M^\sharp f$ definiert durch

$$M^\sharp f(x) := \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f_I| \, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei das Supremum über alle beschränkten Intervalle gebildet wird, die x enthalten.

Bemerkung: Es gilt

$$BMO(\mathbb{R}) = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : M^\sharp f \in L^\infty\}$$

und für $f \in BMO(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{BMO} = \|M^\sharp f\|_\infty.$$

3.19. Lemma: Seien $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

(a) $M^\sharp f \leq 2Mf$, wobei M der (unzentrierte) Hardy-Littlewood-Maximaloperator ist,

(b) $\frac{1}{2}M^\sharp f(x) \leq \sup_{x\in I} \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)-a|\,dy \leq M^\sharp f(x)$,

(c) $M^\sharp|f| \leq 2M^\sharp f$,

(d) $M^\sharp(f+g) \leq M^\sharp f + M^\sharp g$.

Beweis. (d) ist klar, ebenso die rechte Ungleichung in (b). (a) folgt aus

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|\,dy \leq |f|_I + |f_I| \leq 2|f|_I$$

und $Mf(x) = \sup_{x\in I} |f|_I$. Zum Beweis der linken Ungleichung in (b) sei $\varepsilon > 0$. Wähle zu I ein a_I mit

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-a_I|\,dy \leq \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)-a|\,dy + \varepsilon.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|\,dy &\leq \frac{1}{|I|}\int_I |f-a_I|\,dy + \underbrace{|f_I-a_I|}_{\leq \frac{1}{|I|}\int_I |f-a_I|\,dy} \\ &\leq 2\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)-a|\,dy + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Bildet man jetzt das Supremum über $I \ni x$, dann erhält man die linke Ungleichung in (b). Für (c) verwenden wir die linke Ungleichung in (b):

$$\frac{1}{2}M^\sharp|f|(x) \leq \sup_{I\ni x} \frac{1}{|I|}\int_I \underbrace{||f|-|f_I||}_{\leq |f-f_I|}\,dy \leq M^\sharp f(x).$$

$\square$

Folgerung: Wegen (a) ist der Operator $M^\sharp$ vom schwachen Typ $(1,1)$ und auf jedem L^p, $1 < p \leq \infty$, beschränkt.

3.20. Die dyadische Maximalfunktion: Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ist die *dyadische Maximalfunktion* $M_d f$ definiert durch

$$M_d f(x) = \sup_{I\ni x;\, I \text{ dyadisches Intervall}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|\,dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Mit den Operatoren E_k aus 3.4 hat man $M_d f(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}}(E_k|f|)(x)$.

Offensichtlich gilt $M_d f \le Mf$. Somit ist M_d vom schwachen Typ $(1,1)$ und L^p-beschränkt für jedes $p \in (1,\infty]$. Es gilt sogar (Übung)

$$|\{x \in I : M_d f(x) > \alpha\}| \le \frac{1}{\alpha}\int_I |f|\,dy,$$

was wir später verwenden werden.

3.21. Satz (good λ-inequality): Für alle $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ gilt

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > 2\lambda, M^\sharp f(x) \le \gamma\lambda\}| \le 2\gamma|\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}|.$$

Beweis. Setze $\Omega_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}$. Ohne Einschränkung sei $|\Omega_\lambda| < \infty$ (sonst fertig). Dann gibt es zu jedem $x \in \Omega_\lambda$ ein maximales dyadisches Intervall $I^x \ni x$ mit

$$\frac{1}{|I^x|}\int_{I^x} |f(y)|\,dy > \lambda$$

(sonst $|\Omega_\lambda| = \infty$). Beachte $I^y = I^x$ für alle $y \in I^x$. Sei (I_j) eine Abzählung der Menge $\{I^x : x \in \Omega_\lambda\}$. Dann ist Ω_λ disjunkte Vereinigung der I^x und es reicht zu zeigen:

$$\forall j : \quad |\{x \in I_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\sharp f(x) \le \gamma\lambda\}| \le 2\gamma|I_j|$$

(danach über j summieren). Sei also j gegeben und $x \in I_j$ mit $M_d f(x) > 2\lambda$. Es ist hier $M_d f(x) = \sup_{R\in x} |f|_R$, wobei das Supremum über dyadische Intervalle R gebildet wird, die also entweder $R \subseteq I_j$ oder $R \supset I_j$ mit $R \ne I_j$ genügen. Ist aber $R \supset I_j$ mit $R \ne I_j$, so gilt wegen der Maximalität von $I^x = I_j$: $|f|_R \le \lambda$. Wegen $M_d f(x) > 2\lambda$ reicht es, statt $\sup_{R\ni x}$ das Supremum über alle dyadischen Intervalle $R \ni x$ mit $R \subset I_j$ zu nehmen. Dann ist aber auch $M_d(f1_{I_j})(x) > 2\lambda$.

Sei nun I_j' das nächstgrößere dyadische Intervall (dh $|I_j'| = 2|I_j|$ und $I_j \subset I_j'$). Dann gilt

$$|f_{I_j'}| \le |f|_{I_j'} \le \lambda$$

wegen der Maximalität von I_j. Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung ist dann

$$M_d\Big((f - f_{I_j'})1_{I_j}\Big)(x) \ge M_d(f1_{I_j})(x) - |f_{I_j'}| > 2\lambda - \lambda = \lambda.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
|\{x \in I_j : M_d f(x) > 2\lambda\}| &\le |\{x \in I_j : M_d((f - f_{I_j'})1_{I_j})(x) > \lambda\}| \\
&\le \frac{1}{\lambda}\int_{I_j} |f(y) - f_{I_j'}|\,dy \\
&\le \frac{2|I_j|}{\lambda}\frac{1}{|I_j'|}\int_{I_j'} |f(y) - f_{I_j'}|\,dy \\
&\le \frac{2|I_j|}{\lambda} M^\sharp f(\xi)
\end{aligned}$$

für jedes $\xi \in I_j$.

Falls $M^\sharp f(\xi) > \gamma\lambda$ für jedes $\xi \in I_j$ gilt, ist nichts zu zeigen. Sonst wählen wir ein $\xi \in I_j$ mit $M^\sharp f(\xi) \le \gamma\lambda$ und erhalten

$$|\{x \in I_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\sharp f(x) \le \gamma\lambda\}| \le \frac{2|I_j|}{\lambda} M^\sharp f(\xi) \le 2\gamma |I_j|.$$

$\square$

3.22. Satz: Sei $p_0 \in (0, \infty)$. Für jedes $p \in [p_0, \infty)$ gibt es eine Konstante C_p so, dass für alle Funktionen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ mit $M_d f \in L^{p_0}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\|M_d f\|_p \le C_p \|M^\sharp f\|_p.$$

Beweis. Wir setzen für $N > 0$:

$$I_N = \int_0^N p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}| \, d\lambda.$$

Für jedes $N > 0$ ist $I_N < \infty$, denn wegen $p \ge p_0$ ist

$$I_N \le \frac{pN^{p-p_0}}{p_0} \int_0^N p_0 \lambda^{p_0 - 1} |\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}| \le \frac{pN^{p-p_0}}{p_0} \|M_d f\|_{p_0}^{p_0} < \infty.$$

Wir substituieren und verwenden 3.21:

$$\begin{aligned}
I_N &= 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > 2\lambda\}| \, d\lambda \\
&\le 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > 2\lambda, M^\sharp f(x) \le \gamma\lambda\}| \, d\lambda \\
&\quad + 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R} : M^\sharp f(x) > \gamma\lambda\}| \, d\lambda \\
&\le 2^p 2\gamma \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}| \, d\lambda \\
&\quad + \frac{2^p}{\gamma^p} \int_0^{N\gamma/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R} : M^\sharp f(x) > \lambda\}| \, d\lambda \\
&\le 2^p 2\gamma I_N + \frac{2^p}{\gamma^p} \|M^\sharp f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Wähle nun $\gamma > 0$ mit $2^p 2\gamma = 1/2$ und subtrahiere $\frac{1}{2} I_N$ auf beiden Seiten. Dann gibt $N \to \infty$ die Behauptung. $\square$

Folgerung: Für jedes $1 < p < \infty$ gibt es eine Konstante C_p mit

$$\|f\|_p \leq C_p \|M^\sharp f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Ende 13.Vorl.

3.23. Satz: Sei $1 \leq p_0 < \infty$. Für jedes $p \in (p_0, \infty)$ gibt es eine Konstante C_{p,p_0} so, dass für jeden linearen Operator T mit

(i) $T : L^{p_0}(\mathbb{R}) \to L^{p_0}(\mathbb{R})$ ist beschränkt mit Norm A_0,

(ii) $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to BMO(\mathbb{R})$ ist beschränkt mit Norm A_1,

gilt:

$$\|Tf\|_p \leq C_{p,p_0} A_0^{p_0/p} A_1^{1-p_0/p} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Beweis. Definiere $S(f) := M^\sharp(Tf)$ für $f \in L^{p_0} + L^\infty$. Der Operator S ist sublinear und für $p_0 > 1$ gilt nach der Folgerung zu 3.19:

$$\|S(f)\|_{p_0} = \|M^\sharp(Tf)\|_{p_0} \leq C_{p_0} \|Tf\|_{p_0} \leq C_{p_0} A_0 \|f\|_{p_0}, \quad f \in L^{p_0}.$$

Für $p_0 = 1$ hat man

$$|\{x : M^\sharp(Tf) > \alpha\}| \leq \frac{C_1}{\alpha} \|Tf\|_1 \leq \frac{C_1 A_0}{\alpha} \|f\|_1, \quad \alpha > 0, f \in L^1.$$

Außerdem gilt

$$\|S(f)\|_\infty = \|M^\sharp(Tf)\|_\infty = \|Tf\|_{BMO} \leq A_1 \|f\|_\infty, \quad f \in L^\infty.$$

Nach dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz erhalten wir für $p \in (p_0, \infty)$:

$$\|M^\sharp(Tf)\|_p = \|S(f)\|_p \leq$$

Nach der Folgerung zu 3.22 ergibt sich für $p \in (p_0, \infty$ wegen $p_0 \geq 1$:

$$\|Tf\|_p \leq C_p \|M^\sharp(Tf)\|_p \leq \widetilde{C}_{p,p_0} A_0^{p_0/p} A_1^{1-p_0/p} \|f\|_p, \quad f \in L^p.$$

□

3.24. Folgerung: Sei $1 < p_1 < \infty$. Für jedes $p \in (1, p_1)$ gibt es eine Konstante C_{p,p_1} so, dass für jeden linearen Operator T mit

(i) $T : L^{p_1}(\mathbb{R}) \to L^{p_1}(\mathbb{R})$ ist beschränkt mit Norm A_1,

(ii) $T : H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ ist beschränkt mit Norm A_0, gilt:

$$\|Tf\|_p \leq C_{p,p_0} A_0^\theta A_1^{1-\theta} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}),$$

wobei $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p_1}$.

Beweis. Wende 3.23 an auf $p_0 = p_1'$ (beachte, dass $p_1' < p' < \infty$ wegen $1 < p < p_1$). Wir erhalten $T' : L^{p'} \to L^{p'}$, dh $T = (T')' : L^p \to L^p$ mit Norm $\leq C_{p,p_1} A_1^{p_1'/p'} A_0^{1-p_1'/p'}$. Dabei ist

$$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \theta - \frac{1-\theta}{p_1} = (1-\theta)(1 - 1/p_1) = (1-\theta)\frac{1}{p_1'},$$

also

$$\frac{p_1'}{p'} = 1 - \theta \quad \text{und} \quad 1 - \frac{p_1'}{p'} = \theta.$$

□

4 Abschließende Bemerkungen

4.1. Zur Littlewood-Paley-Zerlegung: In 2.1 hatten wir ein $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ genommen mit $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| \leq 1/2$ und $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq 1$ und dann gesetzt $\varphi(\xi) := \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$, sowie für $j \in \mathbb{N}_0$: $\varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi)$. Es ist dann $\varphi_0 = \varphi$ und $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \{2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Für $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ war außerdem $u_j := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_j \hat{u})$, $j \in \mathbb{N}_0$, und $u_{-1} := \mathscr{F}^{-1}(\psi \hat{u})$. In 2.7 hatten wir gesehen, dass

$$\|u\|_{C^\gamma} \approx \sup_{j \geq -1} 2^{j\gamma} \|u_j\|_\infty \quad \text{für } \gamma \in (0,1),$$

und in 2.8, dass

$$\|u\|_{L^p} \approx \|\Big(\sum_{j \geq -1} |u_j|^2\Big)^{1/2}\|_{L^p}, \quad \text{für } 1 < p < \infty.$$

Ausgehend von diesen Darstellungen kann man neue Funktionenräume definieren.

Besovräume: Für $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$:

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{B^s_{p,q}} < \infty\},$$

wobei

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} := \left\| \Big(2^{js} \|u_j\|_{L^p}\Big)_{j \geq -1} \right\|_{l^q}.$$

So ist etwa nach 2.7:

$$B^\gamma_{\infty,\infty} = C^\gamma \quad \text{für } \gamma \in (0,1)$$

(hier ist $p = q = \infty$), und für $s \in \mathbb{R}$ gilt nach 2.4: $B^s_{2,2} = H^s_2$ (hier ist $p = q = 2$).

Bemerkung: (a) Die Definition hängt nicht von der Wahl von ψ ab.

(b) Für $p, q \geq 1$ ist $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}}$.

(c) Ist $T : L^p \to L^p$ linear, beschränkt und translationsinvariant, so folgt $T : B^s_{p,q} \to B^s_{p,q}$ für alle s und q.

Triebel-Lizorkin-Räume: Für $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$:

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{F^s_{p,q}} < \infty\},$$

wobei

$$\|u\|_{F^s_{p,q}} := \left\| x \mapsto \|(2^{js} u_j(x))_{j \geq -1}\|_{l^q} \right\|_{L^p}.$$

Für $s = 0$, $q = 2$ gilt nach 2.8 etwa

$$F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty.$$

Allgemeiner gilt für jedes $s \in \mathbb{R}$:

$$F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty.$$

Bemerkung: (a) Die Definition hängt nicht von der Wahl von ψ ab.

(b) Für $p, q \geq 1$ ist $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{F^s_{p,q}}$.

(c) Für $s \in \mathbb{R}$ und $0 < p < \infty$ gilt nach Fubini: $F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$.

Zur Illustration: Es gilt etwa:

(a) $F^0_{1,2} \hookrightarrow B^0_{1,2}$, denn für $u \in \mathscr{S}'$ gilt nach der kontinuierlichen Minkowski-Ungleichung

$$\Big(\sum_{j \geq -1} \|u_j\|^2_{L^1} \Big)^{1/2} = \left\| \Big(\int |u_j(x)|\, dx \Big)_{j \geq -1} \right\|_{l^2} \leq \left\| \Big(\sum_{j \geq -1} |u_j|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^1}$$

(b) $B^0_{1,1} \hookrightarrow L^1$, denn nach der Dreiecksungleichung ist

$$\left\| \sum_{j \geq -1} u_j \right\|_{L^1} \leq \sum_{j \geq -1} \|u_j\|_{L^1}.$$

4.2. Zu $H^1(\mathbb{R}^n)$: Der Raum $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ wird analog zu $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R})$ definiert, nur mit Kugeln statt Intervallen.

(a) Es gilt

$$H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ für } j = 1, \ldots, n\},$$

wobei R_j die j-te Riesztransformation ist.

(b) Setzt man für φ wie in 4.1: $\varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi)$ **für alle** $j \in \mathbb{Z}$ und $u_j := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_j \hat{u})$, $j \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\|u\|_{H^1_{\text{at}}} \approx \left\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^1}.$$

Die Varianten der Besov- oder Tribel-Lizorkin-Räume, die man auf analoge Weise wie in 4.1 mit den "Bausteinen" u_j, $j \in \mathbb{Z}$, erhält, bezeichnet man als *homogene* Räume und schreibt sie mit einem Punkt über dem B bzw. dem F. So ist also etwa $\dot{F}^0_{1,2} = H^1_{\text{at}}$. Man muss hierbei insofern etwas aufpassen, als man den Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ unter Umständen verlässt.

(c) Es gibt Charakterisierungen von H^1_{at} durch verschiedene Maximalfunktionen.

4.3. Zu $BMO(\mathbb{R}^n)$**:** Der Raum $BMO(\mathbb{R}^n)$ wird analog zum Raum $BMO(\mathbb{R})$ definiert, wobei Kugeln statt Intervallen verwendet werden.

(a) Auch für BMO gibt es eine Charakterisierung mittels Littlewood-Paley-artiger Quadratfunktionen: $BMO = \dot{F}^0_{\infty,2}$, wobei zu beachten ist, dass $p = \infty$ für die F-Räume in 4.1 ausgeschlossen wurde, der Punkt andeutet, dass man die "Bausteine" u_j, $j \in \mathbb{Z}$, aus 4.1 verwendet und dass die genaue Definition von $\dot{F}_{\infty,2}$ anders aussieht, als man es von 4.1 her vermuten sollte (siehe Grafakos).

(b) Der Raum $BMO(\mathbb{R}^n)$ spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der *Calderón-Zygmund-Operatoren*. Ein Calderón-Zygmund-Operator (CZO) ist dabei ein linearer Operator T, zu dem es einen messbaren Kern $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto k(x, y)$ gibt mit

$$Tf(x) \int k(x,y) f(y)\, dy, \quad f \in L^\infty, x \notin \operatorname{supp} f \text{ kompakt},$$

für den im einfachsten Fall gilt

$$|k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n}, \quad |\nabla k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{n+1}}, \quad x \ne y.$$

Mittels der Hörmander-Bedingung kann man zeigen, dass ein CZO auf allen L^p-Räumen mit $1 < p < \infty$ beschränkt ist, falls er auf L^2 beschränkt ist. Das berühmte $T(1)$-Theorem von David und Journé besagt nun, dass ein CZO genau dann L^2-beschränkt ist, wenn T *schwach beschränkt* ist (das ist eine schwache Bedingung "auf der Diagonalen $x = y$") und außerdem $T(1) \in BMO$, $T^*(1) \in BMO$ gilt (auch hierfür sei auf das Buch von Grafakos verwiesen).

Ende
14.Vorl.