

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Informatik

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 12.12.2013, 13:30 Uhr

Beachten Sie bitte, dass Sie in Ihrer Bearbeitung der Aufgaben alle Argumentationschritte sorgfältig begründen müssen und nur den bisher behandelten Stoff verwenden dürfen!

Aufgabe 25 (K)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x) + 9\sqrt[4]{x} + \cos^6(x)}{\sqrt{x}}$
- g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 2} - \sqrt{3x})$
- h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(x) - 1} + \frac{2}{x^2} \right)$

Aufgabe 26

Es sei $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge. Wir betrachten die Menge $D := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und bezeichnen mit $H(D)$ die Menge aller Häufungspunkte von D . Zeigen Sie, dass stets $H(D) \subseteq H((a_n)_n)$ gilt und geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass diese Inklusion echt sein kann.

Aufgabe 27 (K)

Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \ x \mapsto \sqrt{|x|} (x - [x]),$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

jeweils stetig sind.

Aufgabe 28

- a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
- b) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der folgenden Eigenschaft:

$$\text{Es gilt } f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren.

(Hinweis: Betrachten Sie $g(x) := f(x) - f(0)$ ($x \in \mathbb{R}$) und zeigen Sie zunächst, dass $g(x+y) = g(x) + g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.)

Übungsschein

Ein Übungsschein wird genau dann erteilt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Es müssen **mindestens 50 % der** insgesamt erreichbaren **Punkte** erzielt werden.
- Sie müssen sich **fristgerecht (!)** über das QUISPOS-System für den Scheinerwerb anmelden! Die **Prüfungsnummer des Scheines** lautet **261**. **Anmeldeschluss** ist der **07.02.2014**