

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 5. Übungsblatt

#### Aufgabe 23:

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

- (a) Zeigen Sie: Es gilt  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$  divergent ist.
- (c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

#### Aufgabe 24:

Betrachten Sie die Reihe:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$$

- (a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?
- (b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

#### Aufgabe 25:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (a)  $\sum_{n \geq 0} \left[ e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right]$
- (b)  $\sum_{n \geq 1} \left[ e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

#### Aufgabe 26:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert:

- (a)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1 - \frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)}$
- (b)  $\sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$
- (c)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$
- (d)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}}$  mit  $x \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 27:**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a)  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \binom{2n}{n}$

(b)  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

(c)  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{a})$  mit  $0 < a < 1$

(d)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

(e)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

(f)  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \left[ \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right]$

**Aufgabe 28:**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a)  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$  mit  $x \in \mathbb{R}$

(b)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{n^2}$

(c)  $\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}$

(d)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$

(e)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}}$

(f)  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[n]{n} - {}^{n+1}\sqrt{n+1}}{n}$

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 24, 25 (a), 26 (a) – (b) und 27 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.