Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
01.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Bezeichne $G(d)$ die Aussagenform „der Deutsche d ist groß" und $B(d)$ die Aussagenform „der Deutsche d trinkt Bier". Dann lässt sich die obige Aussage wie folgt formal ausdrücken:

$$\forall d : G(d) \wedge B(d)$$

Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$[\neg (\forall d : G(d) \wedge B(d))] \Leftrightarrow [\exists d : \neg (G(d) \wedge B(d))] \Leftrightarrow [\exists d : \neg G(d) \vee \neg B(d)]$$

gegeben. In Worten also: „Es gibt (mindestens) einen Deutschen, der nicht groß ist oder kein Bier trinkt."

(b) Bezeichne B die Aussage „im Kino kommt Batman", J die Aussage „im Kino kommt James Bond" und I die Aussage „ich gehe ins Kino". Dann lässt sich die obige Aussage wie folgt formal ausdrücken:

$$B \vee J \Rightarrow I \tag{1}$$

Mit Hilfe einer Wahrheitstafel überprüft man für beliebige Aussagen A, B die Äquivalenz $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [B \vee \neg A]$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \vee \neg A$
wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr	wahr

Entsprechend ist die Verneinung von (1) durch

$$[\neg (B \vee J \Rightarrow I)] \Leftrightarrow [\neg (I \vee \neg (B \vee J))] \Leftrightarrow [\neg I \wedge \neg\neg (B \vee J)] \Leftrightarrow [\neg I \wedge (B \vee J)]$$

gegeben. In Worten also: „Ich gehe nicht ins Kino, obwohl Batman oder James Bond gezeigt werden."

(c) Zuerst werden die formalen Symbole v für Bundesligaverein, s für Spiel sowie die Funktionen $T(v, s)$ für die Anzahl der Tore, die der Verein v im Spiel s geschossen hat und $A(v, s)$ für die Anzahl der ausgewechselten Spieler des Vereins v im Spiel s eingeführt. Die gegebene Aussage lautet formal also:

$$\exists v : \forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1$$

Ihre Verneinung ergibt sich also formal zu

$$\begin{aligned}
\neg\left(\exists v : \forall s : T(v,s) \leq 3 \wedge A(v,s) \geq 1\right) &\Leftrightarrow \forall v : \neg\left(\forall s : T(v,s) \leq 3 \wedge A(v,s) \geq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : \neg\left(T(v,s) \leq 3 \wedge A(v,s) \geq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : \neg\left(T(v,s) \leq 3\right) \vee \neg\left(A(v,s) \geq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : T(v,s) > 3 \vee A(v,s) < 1 \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : T(v,s) > 3 \vee A(v,s) = 0,
\end{aligned}$$

bzw. in Worten zu: „Jeder Bundesligaverein hat in mindestens einem Spiel mehr als drei Tore geschossen oder hat keinen Spieler ausgewechselt.“

□

Aufgabe 2:

(a)

$$\begin{aligned}
A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)] &\Leftrightarrow A \wedge [((C \wedge \neg B) \vee B) \vee \neg A] \\
&\Leftrightarrow A \wedge [((B \vee C) \wedge (B \vee \neg B)) \vee \neg A] \\
&\Leftrightarrow A \wedge [((B \vee C) \wedge \text{wahr}) \vee \neg A] \\
&\Leftrightarrow A \wedge [B \vee C \vee \neg A] \\
&\Leftrightarrow A \wedge [B \vee C \vee \neg A] \\
&\Leftrightarrow [A \wedge (B \vee C)] \vee (A \wedge \neg A) \\
&\Leftrightarrow [A \wedge (B \vee C)] \vee \text{falsch} \\
&\Leftrightarrow A \wedge (B \vee C)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)] \\
\Leftrightarrow\quad & (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)) \\
\Leftrightarrow\quad & \text{falsch} \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\quad & (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \text{falsch}) \\
\Leftrightarrow\quad & (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \\
\Leftrightarrow\quad & (A \wedge B) \wedge (C \vee \neg C) \\
\Leftrightarrow\quad & (A \wedge B) \wedge \text{wahr} \\
\Leftrightarrow\quad & A \wedge B
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3:

(a) Sei $x \in M_1 \cap M_3$. Insbesondere $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subseteq M_1 \cup M_3 \subseteq M_2$ folgt $x \in M_2$. Also $x \in M_1 \cap M_2 \subseteq M_3^c$, d.h. $x \notin M_3$. Insbesondere $x \notin M_1 \cap M_3$. Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Menge $M_1 \cap M_3$ keine Elemente enthalten — sie ist die leere Menge.

(b) (i) Es gilt:

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \cap M_2 \\
&\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
y \in f(M_3 \cap M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cap M_4 : f(x) = y \\
&\Rightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \wedge \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\
&\Leftrightarrow y \in f(M_3) \wedge y \in f(M_4) \\
&\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cap f(M_4)
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
y \in f(M_3 \cup M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cup M_4 : f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \vee \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\
&\Leftrightarrow y \in f(M_3) \vee y \in f(M_4) \\
&\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cup f(M_4)
\end{aligned}$$

Für das geforderte Gegenbeispiel betrachte man $X = Y = \mathbb{R}$ und $x \overset{f}{\mapsto} x^2$ sowie $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ und $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$. Es gilt $M_3 \cap M_4 = \emptyset$ und folglich $f(M_3 \cap M_4) = \emptyset$, aber $f(M_3) = f(M_4) = \mathbb{R}^+$ und folglich $f(M_3) \cap f(M_4) = \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$.

□

Aufgabe 4:

(a) (i) Die angegebene Relation ist keine Äquivalenzrelation, da sie nicht symmetrisch ist. Zum Beispiel ist $6 \sim 2$, da $6 = 2 \cdot 3$ ist, aber es gilt nicht $2 \sim 6$, da kein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $2 = 6 \cdot k$.

(ii) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation:

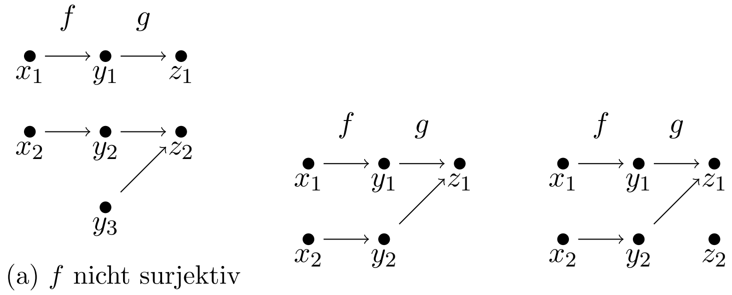
- *Reflexivität:* Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = x + 2\pi \cdot 0$ und somit $x \sim x$.
- *Transitivität:* Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2\pi k$ und $y = z + 2\pi l$. Somit ist $x = y + 2\pi(k + l)$, also $x \sim z$.
- *Symmetrie:* Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2\pi k$. Folglich ist $y = x + 2\pi(-k)$ und $y \sim x$.

(iii) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation:

- *Reflexivität:* Für alle $(z_1, n_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gilt $z_1 n_1 = z_1 n_1$ und somit $(z_1, n_1) \sim (z_1, n_1)$.
- *Transitivität:* Es seien $(z_1, n_1), (z_2, n_2), (z_3, n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ und $(z_2, n_2) \sim (z_3, n_3)$. Dann gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$ und $z_2 n_3 = z_3 n_2$ und damit $\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_3}{n_3}$. Somit ist $(z_1, n_1) \sim (z_3, n_3)$.
- *Symmetrie:* Für alle $(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$. Hieraus folgt $z_2 n_1 = z_1 n_2$ und somit $(z_2, n_2) \sim (z_1, n_1)$.

(b) Die angegebene Relation ist eine Ordnungsrelation:

- *Reflexivität:* Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt $x_1 \leq x_1$ und $x_2 \leq x_2$ und somit $(x_1, x_2) \prec (x_1, x_2)$.
- *Transitivität:* Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \prec (z_1, z_2)$. Dann gilt $x_1 \leq y_1 \leq z_1$, $x_2 \leq y_2 \leq z_2$ und damit $x_1 \leq z_1$ sowie $x_2 \leq z_2$. Also $(x_1, x_2) \prec (z_1, z_2)$.



(a) f nicht surjektiv
g nicht injektiv

(b) f injektiv

(c) f surjektiv

Abbildung 1: Gegenbeispiele

- *Antisymmetrie:* Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \prec (x_1, x_2)$. Dann gilt $x_1 \leq y_1$ und $y_1 \leq x_1$ sowie $x_2 \leq y_2$ und $y_2 \leq x_2$. Damit folgt $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, also $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

□

Aufgabe 5:

(a) (i) Seien $x, y \in X$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$. Es gilt:

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) \quad &\Leftrightarrow \quad (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \\ &\Leftrightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\overset{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad f(x) = f(y) \\ &\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad x = y \end{aligned}$$

(ii) Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : h(x) = z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Für dieses x gilt tatsächlich: $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(iii) Nach (i) ist h injektiv. Nach (ii) ist h surjektiv. Also ist h bijektiv.

(iv) Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists y \in Y : g(y) = z$. Da h surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = g(f(x)) = z$. Mit der Wahl $y = f(x) \in Y$ gilt tatsächlich $g(y) = z$.

(v) Sei $y \in Y$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : f(x) = y$. Betrachte dazu $g(y) \in Z$. Da h surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = g(f(x)) = g(y)$. Da g injektiv ist, muss aber $f(x) = y$ gelten.

(b) Seien $X = \{x_1, \ldots\}$, $Y = \{y_1, \ldots\}$ und $Z = \{z_1, \ldots\}$ (siehe Abbildung 1).

(i) Siehe Abbildung 1a: g ist nicht injektiv, denn $g(y_2) = g(y_3) = z_2$.

(ii) Siehe Abbildung 1a: f ist nicht surjektiv, denn $y_3 \notin f(X)$.

(iii) Siehe Abbildung 1b: f ist injektiv.

(iv) Siehe Abbildung 1c: f ist surjektiv.

□

Aufgabe 6:

(a) Die angegebene Zuordnungsvorschrift ergibt genau dann keinen Sinn, wenn $cx + d = 0$ (Division durch 0). Ist $c = 0$, so muss $d \neq 0$ sein, und f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ist $c \neq 0$, so darf $x = -\frac{d}{c}$ nicht in die Zuordnungsvorschrift eingesetzt werden. Zusammenfassend:

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } c = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \text{für } c \neq 0 \end{cases}$$

(b) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn für alle $x, y \in D_f$ mit $x \neq y$ auch $f(x) \neq f(y)$ ausfällt. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d} \\ &\Leftrightarrow \quad (ax+b)(cy+d) = (ay+b)(cx+d) \\ &\Leftrightarrow \quad acxy + adx + bcy + bd = acxy + ady + bcx + bd \\ &\Leftrightarrow \quad ad(x-y) = bc(x-y) \\ &\overset{x \neq y}{\Leftrightarrow} \quad ad = bc \end{aligned}$$

Also gilt:

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow ad \neq bc \tag{2}$$

Sei nun f injektiv. Für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = y \Leftrightarrow ax + b = y(cx+d) \Leftrightarrow (a - cy)x = dy - b$$

Angenommen, $a = cy$. Dann liefert die letzte Gleichung $dy - b = 0$. Multiplikation mit c ergibt $0 = dcy - cb = da - cb \Rightarrow ad = bc$. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität nach (2). Die Annahme $a = cy$ muss verworfen werden und es gilt:

$$f(x) = y \Leftrightarrow a - cy \neq 0 \wedge x = \frac{dy-b}{a-cy} \tag{3}$$

Diese Äquivalenz liefert:

$$f(D_f) = D_{f^{-1}} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } c = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} & \text{falls } c \neq 0 \end{cases}, \quad f^{-1} : D_{f^{-1}} \to D_f, \quad y \overset{f^{-1}}{\mapsto} = \frac{dy-b}{a-cy}$$

(c) Damit die Komposition $f \circ f$ überhaupt erklärt ist, muss $f(D_f) \subseteq D_f$ gelten. Das kann nur für $c = 0$ ($\Rightarrow D_f = f(D_f) = \mathbb{R}$) bzw. für $a = -d$ ($\Rightarrow D_f = f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$) gelten. Aus $f \circ f = \mathrm{id}_{D_f}$ folgt dann nach Satz 3.5 der Vorlesung $f = f^{-1}$. Es gilt dann für alle $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f(x) = f^{-1}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{dx-b}{a-cx} \\ &\Leftrightarrow \quad a^2x - acx^2 + ab - bcx = cdx^2 - bcx + d^2x - bd \\ &\Leftrightarrow \quad -(ac+cd)x^2 + (a^2 - d^2)x + (ab + bd) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -c(a+d)x^2 + (a-d)(a+d)x + b(a+d) = 0 \end{aligned}$$

Wenn das Polynom in x auf der linken Seite nicht identisch verschwindet, hat es höchstens zwei Nullstellen. Allerdings enthält D_f mehr als zwei Punkte. Also müssen alle Koeffizienten Null sein, d.h:

$$f = f^{-1} \Leftrightarrow c(a+d) = (a-d)(a+d) = b(a+d) = 0 \Leftrightarrow a = -d \vee c = (a-d) = b = 0$$

□