Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
12.02.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 73 (Übung)

a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\mathrm{e}^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

b) Berechnen Sie, falls existent, den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)\mathrm{e}^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)}\,\mathrm{e}^x \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^x$$

gilt: Für $\mathrm{e}^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $\mathrm{e}^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\cdot 1$, da $n(n+3) \nrightarrow 0$. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe.

Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := \mathrm{e}^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^n = y\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^{n-1}$$

berechnen. Offenbar besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)y^n = \frac{1}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)y^{n+2}.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+3} \overset{k:=n-1}{=} y^4\sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{|y|<1}{=} \frac{y^4}{1-y}.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y)+y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3-3y^4}{(1-y)^2}, \qquad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y-3y^2}{(1-y)^2}.$$

Also ist
$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2 + (4y-3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}.$$
Schließlich ergibt sich dann
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\mathrm{e}^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y-2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}}{(1-\mathrm{e}^x)^3}.$$

b) Nach **Aufgabe 34 d)** ist die Funktionenreihe im Integranden gleichmäßig konvergent. Die Summanden sind stetig und somit Riemann-integrierbar auf $[0,1]$, weshalb wegen **Satz 13.1** gilt, dass
$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{n})^2+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\arctan(x/n)]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n}\end{aligned}$$
und die letzte Reihe konvergent ist.

Aufgabe 74 (Tutorium)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

a) $U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$,

b) $U := \{(x_1,x_2,x_3) \in V = \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$,

c) $U := \{f \in V = C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) = 1\}$,

d) $U := \{f \in V = Abb(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$.

Lösungsvorschlag

Wir prüfen stets mithilfe des Untervektorraumkriteriums **14.2**, ob es sich bei U um einen UVR von V handelt. Zunächst bemerken wir, dass **14.2 (ii)** äquivalent zu folgender Forderung ist:

(ii') Aus $x, y \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ folgt stets: $\alpha x + y \in U$.

a) Trivialerweise gilt $0 \in U$. Seien nun $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ zwei Folgen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Da V ein Vektorraum ist, ist $\alpha x + y \in V$. Dies gilt auch stets aus derselben Begründung für die weiteren Beispiele. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung
$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\alpha x + y)_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha x_n + y_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (|\alpha x_n| + |y_n|) = |\alpha| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| < \infty,$$
da $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| < \infty$. Damit gilt $\alpha x + y \in U$ und U ist ein UVR von V.

b) Trivialerweise ist $0 \in U$. Seien $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gelten
$$\begin{aligned}(\alpha x + y)_1 &= \alpha x_1 + y_1 = \alpha \cdot 2x_2 + 2y_2 = 2(\alpha x + y)_2, \\ 2(\alpha x + y)_2 &= \alpha \cdot 2x_2 + 2y_2 = \alpha \cdot (-3)x_3 + (-3)y_3 = -3(\alpha x + y)_3.\end{aligned}$$
Das heißt aber gerade $\alpha x + y \in U$.

c) Es sei $f = 0 \in C^1[0,1]$ die konstante Nullfunktion. Dann gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) \;=\; 0 \;\neq\; 1,$$

weswegen $0 \notin U$. Damit ist U auch kein UVR von V.

d) Trivialerweise ist $0 \in U$ (konstante Nullfunktion). Es sind $\sin^2, \cos^2 \in U$. Dann hat $f := \sin^2 + \cos^2 = 1$ als konstante Einsfunktion keine Nullstelle. Damit ist U auch kein UVR von V.

Aufgabe 75 (Übung)

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Lösungsvorschlag

1. Fall: $s < 0$. Für jedes $x \geq 1$ gilt $x^s \leq x^0 = 1$ und $x^{1/s} \leq x^0 = 1$, so dass $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \geq \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Divergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ liefert das Minorantenkriterium die Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$. Infolgedessen ist I_s divergent.

2. Fall: $s \in (0,1)$. Wir zeigen, dass sowohl $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ als auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ konvergieren. Hieraus folgt dann die Konvergenz von I_s.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^s}$. Da $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ gemäß Beispiel (1) nach Definition 2 in Paragraph 13 konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^{1/s}}$. Da $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ wegen $1/s > 1$ konvergiert (vgl. Beispiel (1)), ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

3. Fall: $s = 1$. $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ ist divergent (vgl. Beispiel (1)).

4. Fall: $s > 1$. Ist $q := 1/s$ gesetzt, so gilt $q \in (0,1)$. Daher konvergiert laut Fall 2

$$I_q = \int_0^\infty \frac{1}{x^q + x^{1/q}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/s} + x^s}\,\mathrm{d}x = I_s.$$

Fazit: I_s ist genau dann konvergent, wenn $s > 0$ und $s \neq 1$ gilt.

Aufgabe 76 (Tutorium)

a) Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\mathrm{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V ist, die M enthalten.

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

(ii) Ist $M := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

(iii) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dann sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

(iv) Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

(v) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Lösungsvorschlag

a) Wir wollen zeigen, dass

$$\operatorname{lin}(M) = \bigcap_{U \supset M, U \text{ UVR von } V} U.$$

Dass die rechte Menge in der linken enthalten ist, ist klar, da $\operatorname{lin}(M)$ ein solcher Untervektorraum von V ist. Sei nun U ein beliebiger Untervektorraum von V, der M enthält. Ein Element $x \in \operatorname{lin}(M)$ lässt sich per definitionem als Linearkombination endlich vieler Elemente aus M schreiben. Da diese endlich vielen Elemente aus M auch in U liegen und dies ein Untervektorraum ist, liegt x somit auch in U. Somit ist $\operatorname{lin}(M)$ eine Teilmenge jedes solchen Untervektorraums, also auch des Schnittes über all diese Untervektorräume.

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

(i) Ist $M \subseteq V$ mit $0 \in M$, so gilt $\operatorname{lin}(M) = \operatorname{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

(ii) Diese Aussage ist falsch. Sei $V = \mathbb{K}^n$ mit $n \geqslant 1$. Dann ist $M := \{0, e_1\}$ nach **(i)** linear abhängig, aber e_1 lässt sich nicht als Linearkombination von 0 darstellen. (Eine Linearkombination von 0 sind lediglich nur Vielfache von 0.)

(iii) Es sei $v \in V$ ein Vektor mit eindeutiger Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,$$

das heißt, mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Sei

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

eine Darstellung von 0 als Linearkombination. Dann gilt

$$v = v + 0 = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \lambda_j) v_j.$$

Da die Darstellung von v eindeutig ist, gilt für alle j

$$\alpha_j + \lambda_j = \alpha_j,$$

d.h., $\lambda_j = 0$ für alle j. Insbesondere sind dann $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig.

(iv) Die Aussage ist falsch. Seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig. Ist $v = -v_1$, so ist

$$\{v_1 + v; v_2 + v; \dots; v_n + v\} = \{0; v_2 + v; \dots; v_n + v\}$$

nach **(i)** nicht linear unabhängig.

(v) Die Aussage ist falsch. Seien v_1, v_2 linear unabhängig. Dann sind auch $v_1, v_3 := -v_2$ linear unabhängig, doch $v_3 = -v_2$ und v_2 sind nicht linear unabhängig.

Aufgabe 77 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert (wobei in (i) $s < 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{st}\cos(tx)\,dt,$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\,dt.$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\,dt,$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\log(1+t)\,dt.$

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log(\log k)}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \underbrace{e^{st}}_{u'(t)}\underbrace{\cos(tx)}_{v(t)}\,dt &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}\left[e^{st}\cos(tx)\right]_{t=0}^{t=b} + \frac{x}{s}\int_0^b \underbrace{e^{st}}_{u'(t)}\underbrace{\sin(tx)}_{v(t)}\,dt \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}\left[e^{st}\sin(xt)\right]_{t=0}^{t=b} - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt \\
&= \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}e^{sb}\sin(xb) - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt
\end{aligned}$$

Addieren von $\frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt$ auf beiden Seiten liefert

$$\left(1+\frac{x^2}{s^2}\right)\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt = \frac{s^2+x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt = \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}e^{sb}\sin(bx)$$

und damit

$$\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt = -\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx).$$

Wegen

$$|e^{sb}\cos(bx)| \le e^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0 \qquad \text{sowie} \qquad |e^{sb}\sin(bx)| \le e^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\,dt$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx)\right) \\
&= -\frac{s}{s^2+x^2}
\end{aligned}$$

(ii) Wir untersuchen den Integranden in der Nähe der unteren Grenze. Es ist

$$\log(t) \le \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle $0 < t \le \frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh (vgl. Paragraph 9 der Vorlesung)

$$\begin{aligned} 0 < \sinh(t) - t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} - t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n+3} = t^3 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n}}_{=:h(t)>0} \end{aligned}$$

für alle $0 < t \le \frac{1}{\mathrm{e}}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist stetig als Potenzreihe mit Konvergenzradius unendlich. Als stetige Funktion nimmt sie auf kompakten Intervallen ihr Maximum an, also existiert ein $M > 0$ mit $0 < h(t) \le M$ für alle $0 \le t \le \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Also ist

$$-\frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t} \ge \frac{t\log(\mathrm{e})}{t^3 h(t)} \ge \frac{1}{t^2 M}$$

für alle $0 < t \le \frac{1}{\mathrm{e}}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{M}\left[\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a} - \mathrm{e}\right) \xrightarrow{a \to 0+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\, \mathrm{d}t$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus **Satz 13.5** der Vorlesung ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\, \mathrm{d}t$$

divergent. Somit ist das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\, \mathrm{d}t$$

ebenfalls divergent.

b) (i) Für alle $0 < t \le 1$ gilt

$$t^2 \leqslant t \leqslant \sqrt{t}.$$

Damit folgt

$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{t} + \underbrace{(\sqrt{t} - t^2)}_{\geqslant 0}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

für alle $0 < t \leqslant 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = 2\Big[\sqrt{t}\Big]_{t=a}^{t=1} = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} = 2$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus der Vorlesung ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t-t^2}}\, \mathrm{d}t$ (absolut) konvergent.

(ii) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\int_0^b \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{\log(1+t)}_{v(t)}\, \mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\Big[\mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\Big]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t = -\frac{\log(1+b)}{\mathrm{e}^b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{\mathrm{e}^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1+b)\mathrm{e}^b} = 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\, \mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus **Satz 13.5** der Vorlesung, weil für alle $0 \leqslant t < \infty$

$$\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

gilt, und

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \lim_{b\to\infty} -\Big[\mathrm{e}^{-t}\Big]_{t=0}^{t=b} = 1 - \lim_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-b} = 1.$$

c) Wir berechnen für $t > 1$ mit $f(t) = (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))} = (\log(t))^2 \mathrm{e}^{-\log(t)\cdot\log(\log(t))}$, dass

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(\log(t))\frac{1}{t}t^{-\log(\log(t))} + (\log(t))^2\left(t^{-\log(\log(t))}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\log(\log(t))\right)\right) \\ &= -t^{-1-\log(\log(t))}\log(t)(\log(t)(1+\log(\log(t))) - 2). \end{aligned}$$

Es gibt also ein solches $c \in (1,\infty)$, dass die Funktion $t \mapsto (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))}$ auf $[c,\infty)$ monoton fällt. Substituiere $x = \log(t)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$:

$$\int_c^\infty \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_c^b \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_{\log(c)}^{\log(b)} x^2 \mathrm{e}^{x - x\log(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Sei $g(x) := x - x\log(x)$. Dann gilt $g'(x) = -\log(x)$ für $x > 0$ und damit $g'(x) < -1$ für $x > \mathrm{e}$. Zudem ist $g(\mathrm{e}^2) = -\mathrm{e}^2$ und somit

$$g(x) = g(\mathrm{e}^2) + \underbrace{\int_{\mathrm{e}^2}^x g'(y)\, \mathrm{d}y}_{=g(x)-g(\mathrm{e}^2)} < -\mathrm{e}^2 + \int_{\mathrm{e}^2}^x (-1)\, \mathrm{d}y = -x.$$

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt für $x > \mathrm{e}^2$, dass $\mathrm{e}^{x - x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$. Da nach **Aufgabe 63** $\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty$, konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium und die Reihe nach **13.6**.

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t$.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\log(t))^4\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $a < 3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \quad &\underset{\mathrm{d}s = s\,\mathrm{d}t}{\overset{s=e^t}{=}} \quad \int_{e^a}^{e^3} \frac{s^2}{1+s}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{e^a}^{e^3} \frac{1+s-1}{1+s}\,\mathrm{d}s \\
&= \quad \int_{e^a}^{e^3} 1 - \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = [s - \log(1+s)]_{s=e^a}^{s=e^3} \\
&= \quad e^3 - \log(1+e^3) - e^a + \log(1+e^a) \xrightarrow{a\to-\infty} e^3 - \log(1+e^3)
\end{aligned}$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ konvergent und es ist

$$\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = e^3 - \log(1+e^3)$$

(ii) Per definitionem ist das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-1}^0 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \log(|t|)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$$

Sei $0 < a < 1$. Wegen

$$\int_{-1}^{-a} \log(|t|)\,\mathrm{d}t \overset{s=-t}{=} \int_a^1 \log(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$$

reicht es, nur eins der beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz zu untersuchen. Es gilt

$$\int_a^1 \log(t)\,\mathrm{d}t = [t\log(t) - t]_{t=a}^{t=1} = (-1 - a\log(a) + a)$$

sowie

$$\lim_{a\to 0+}(a - a\log(a)) = \lim_{a\to 0+} a\log\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to 0+}\frac{\log\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\log(x)}{x}}_{\to\infty} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Folglich ist $\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = -1$$

und damit

$$\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = -2.$$

b) (i) Sei $0 < a < 1$. Es gilt:

$$\int_a^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{d}t=-t\,\mathrm{d}s}{\overset{t=e^{-s}}{=}} -\int_{-\log(a)}^0 s^4e^{-s}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\log\left(\frac{1}{a}\right)} s^4e^{-s}\,\mathrm{d}s$$

Wegen $\lim_{a\to 0+}\log\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t$ konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty s^4e^{-s}\,\mathrm{d}s$ konvergent ist. Dies ist nach **Aufgabe 63** tatsächlich der Fall.

(ii) Auf $(0,1]$ gilt $\sin(\frac{1}{t}) \leqslant 1$. Da das "uneigentliche" Integral

$$\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0}\int_a^1 1\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} 1 - a = 1$$

konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch das Ausgangsintegral.

c) Die Funktion $t \mapsto (\log(t))^{-\log(t)}$ ist für $t \geq \mathrm{e}$ monoton fallend. Substitution $x = \log(t)$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$ liefert

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(\log(t))^{\log(t)}} = \int_{\log 3}^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{x^x}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 3}^\infty \mathrm{e}^{x - x\log(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Wie in **Aufgabe 77 c)** berechnet, gilt $\mathrm{e}^{x-x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$ für $x > \mathrm{e}^2$ und da das uneigentliche Integral $\int_{\mathrm{e}^2}^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ existiert (Wert $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^2}$) konvergiert auch das Ausgangsintegral und nach **13.6** die gegebene Reihe.