Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
12.02.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 79 (Übung)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

Lösungsvorschlag

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\ \ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 2\ \ \cdot(-4) \\ + \\ \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot\frac{1}{2}\ \ \cdot\frac{1}{4} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot\frac{1}{2} \\ \mid \cdot\frac{1}{4} \\ \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \\ +\ \ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 4$, für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$. Ansonsten ist $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ gilt. Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von B und die Basis ist gegeben durch die drei ersten Zeilen der Matrix. In allen anderen Fällen ist eine Basis durch alle vier Zeilen der Ausgangsmatrix gegeben. Ist $\alpha = 10$ aber $\beta \neq 4$, so ist

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ + \\ \cdot\frac{1}{\beta-4}\ \ \cdot\frac{-3}{\beta-4}\ \ \mid \cdot\frac{1}{\beta-4} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha \neq 10$, so sei $\kappa = \frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
B \quad &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ |\cdot\frac{1}{\alpha-10} \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

die Zeilennormalform von B.

Aufgabe 80 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.
$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

b) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 = x_3\}$,

(ii) $\text{lin}(\{x^2, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1, x^7+x^5\})$

Lösungsvorschlag

a) Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$
\begin{aligned}
A \quad = &\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot -\frac{1}{2} \\ |\cdot -\frac{1}{2} \\ |\cdot -\frac{1}{3} \end{matrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig und bilden damit eine Basis ihrer linearen Hülle.

b) (i) Eine Basis ist gegeben durch $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$, denn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ folgt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = (0,0,0,)$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; ist ferner $v \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = x_3\}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = (a, b, a)$, also $v = av_1 + bv_2$.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass $\{x^2, x^2+x, x^2+1, x^7+x^5\}$ linear unabhängig ist: Es gelte

$$
\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2+x) + \lambda_3(x^2+1) + \lambda_4(x^7+x^5) = 0,
$$

also

$$\lambda_3 + \lambda_2 x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + \lambda_4 x^5 + \lambda_4 x^7 = 0.$$

Da die Polynome $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} \subset P$ linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_3 = 0, \quad , \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Damit ist $\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig. Schließlich lässt sich das Polynom $x^2 + x + 1$ als Linearkombination aus den restlichen Polynomen darstellen, und zwar gilt

$$-x^2 + (x^2 + x) + (x^2 + 1) = x^2 + x + 1.$$

Damit ist $\operatorname{lin}(\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^7 + x^5\})$ ein 4-dimensionaler Vektorraum und

$$\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^7 + x^5\}$$

ist eine Basis dieses Vektorraums.

Alternativ ist dann Offensichtlich auch $\{1, x, x^2, x^7 + x^5\}$ eine Basis (die Vektoren sind linear unabhängig und jeder Vektor lässt sich als Linearkombination der Vektoren der ersten Basis schreiben).

Aufgabe 81 (Übung)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Lösungsvorschlag

Wir formen die Matrix so weit zu einer Zeilenstufenform um, wie die Allgemeinheit von α und β es zulässt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-\alpha)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha^2 & 2 - \alpha \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha^2 & 2 - \alpha \end{array}\right)$$

Nun folgt eine Fallunterscheidung.
<u>1. Fall:</u> $\beta \neq \alpha^2$. Sei $\gamma := \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2}$. Wir dividieren die dritte Zeile durch $\beta - \alpha^2$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-\alpha),\ \cdot(-2-\alpha)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - (2 + \alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar. die Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 2-(2+\alpha)\gamma \\ 1-\alpha\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{4-\alpha^2}{\beta-\alpha^2} \\ 1-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\beta-\alpha^2} \\ \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha^2}\begin{pmatrix} 2\beta-\alpha^2-4 \\ \beta-2\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix}$$

<u>2. Fall:</u> $\beta = \alpha^2$, $\alpha \neq 2$. Das Gleichungssystem hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

und ist wegen $2-\alpha \neq 0$ nicht lösbar, da die erweiterte Matrix mit 3 einen höheren Rang hat als die Matrix selbst.
<u>3. Fall:</u> $\beta = \alpha^2$, $\alpha = 2$ (also $\beta = 4$). Die Matrix hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und ist in Zeilennormalform. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 1, \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 4x_3, \\ x_2 &= 1 - 2x_3, \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

x_3 ist also ein frei wählbarer Paramter und der Lösungsraum der gegebenen Gleichung lautet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alternativ kann man in Matrixform den so genannten (-1)-Trick anwenden. Ist die Matrix in Zeilennormalform, ergänze man die gesamte Matrix so durch Nullzeilen, dass die nicht erweiterte Matrix quadratisch ist und die Nicht-Nullzeilen ihre vorhandene erste Eins auf der Diagonale dieser Matrix haben (dies ist hier bereits der Fall, links steht eine 3×3-Matrix mit ihren Einsen auf der Diagonalen. Nun ersetzt man die Nullen auf der Diagonale durch (-1)en. Die spezielle Lösung des Gleichungssystems ist über die Spalte ganz rechts abzulesen, der Lösungsraum der homogenen Gleichung (mit Parameter davor) ist durch die Spalten der Matrix links gegeben, die zu einer eingefügten (-1) gehören.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (-1) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{K} \right\}$$

Hinweis: Der Vektor $(4,2,-1)$ hat hierbei ein anderes Vorzeichen als bei der oberen Methode, durch die freie Wahl von $s \in \mathbb{K}$ handelt es sich jedoch um die Gleiche Lösungsmenge.

Aufgabe 82 (Tutorium)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(A|b)$ und $\operatorname{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Lösungsvorschlag

a) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|b|c)$ auf Zeilennormalform. Wir schreiben beide Vektoren b und c in die Erweiterung, da die Zeilennormalform nur von der Matrix A abhängt und die Operationen somit bei beiden erweiterten Matrizen dieselben sind.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad \cdot 5 \;\; \cdot 3 \;\; | \cdot (-1)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 13 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 13 & 3 \end{array}\right) \quad \cdot(-1) \;\; | \cdot \tfrac{1}{6}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Wir erkennen somit, dass $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2$, $\operatorname{rg}(A|c) = 3$.

b) Nach **Satz 14.10** ist $\dim(\operatorname{Bild} A) = \operatorname{rg}(A) = 2$ und nach der **Dimensionsformel** in **14.11** dementsprechend (die Matrix besitzt 6 Spalten)

$$\dim(\operatorname{Kern} A) = 6 - \dim(\operatorname{Bild} A) = 6 - 2 = 4.$$

Schreiben wir $Ax = 0$ in der obigen Zeilennormalform zu einem Gleichungssystem um, ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{5}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_6 = 0, \\ x_2 + \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{6}x_5 + \frac{5}{6}x_6 = 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_2 &= -\frac{7}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{5}{6}x_6. \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= x_4, \\ x_5 &= x_5, \\ x_6 &= x_6. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$, indem wir x_3 bis x_6 durch beliebige Parameter ersetzen,

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}s - \frac{2}{3}t - \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}v \\ -\frac{7}{6}s + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}u - \frac{5}{6}v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -s - 4t - 5u + 1v \\ -7s + 2t + u - 5v \\ 6s \\ 6t \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K} \right\},$$

wobei wir für die zweite Menge jeden Parameter durch sein Sechsfaches ersetzt haben. Analog erhält man das Resultat über den (-1)-Trick (die einzelnen Vektoren mit ihren Parametern wurden hier zu einem Vektor zusammengefasst).

c) Das Gleichungssystem $Ax = c$ ist unlösbar, da $\operatorname{rg}(A|c) = 3 \neq 2 = \operatorname{rg}(A)$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar und die allgemeine Lösung ist gegeben als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Mit dem gleichen Vorgehen wie in **b)** gilt nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_2 &= \frac{13}{6} - \frac{7}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{5}{6}x_6. \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= x_4, \\ x_5 &= x_5, \\ x_6 &= x_6, \end{aligned}$$

und somit ist die Lösungsmenge

$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}s - \frac{2}{3}t - \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}v \\ -\frac{7}{6}s + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}u - \frac{5}{6}v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s - 4t - 5u + 1v \\ -7s + 2t + u - 5v \\ 6s \\ 6t \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\}.$$

Aufgabe 83 (Übung)

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert durch $(A^T)_{ij} := a_{ji}$. Die Abbildung $P : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a_{1n} & \dots & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $P(\alpha A + B) = \alpha P(A) + P(B)$.

b) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $P(A) = 0 \Leftrightarrow A^T = -A$. In diesem Fall heißt A *schiefsymmetrisch*.

c) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $A \in P(\mathbb{K}^{n\times n}) \Leftrightarrow A^T = A$. In diesem Fall heißt A *symmetrisch*.

d) $\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | P(A) = 0\}) = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A \in P(\mathbb{K}^{n\times n})\}) = \frac{n(n+1)}{2}$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ sowie $(A+B)^T = A^T + B^T$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wie man direkt anhand der Definition erkennt. Damit folgt

$$\begin{aligned} P(\alpha A + B) &= \frac{1}{2}\left(\alpha A + B + (\alpha A + B)^T\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha A + B + \alpha A^T + B^T\right) \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(B + B^T\right) = \alpha P(A) + P(B), \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

b) Es ist $P(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; A + A^T = 0 \;\Leftrightarrow\; A^T = -A$.

c) (i) Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow P(B)^T = \frac{1}{2}(B + B^T)^T = \frac{1}{2}(B^T + B) = P(B)$, da $(B^T)^T = B$ anhand der Definition. Also gilt für $P(\mathbb{K}^{n\times n}) \ni A = P(B)$ dann $A^T = A$.

(ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^T = A$. Dann gilt $\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$, also $P(A) = A$. Es folgt $A \in P(\mathbb{K}^{n\times n})$.

Insgesamt folgt aus (i) und (ii): $A \in P(\mathbb{K}^{n\times n}) \Leftrightarrow A^T = A$.

d) Eine Basis von $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A \in P(\mathbb{K}^{n\times n})\} \overset{\textbf{b)}}{=} \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A = A^T\}$ wird durch die folgenden Matrizen gebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots \tag{0.2}$$

(Einsen auf der Diagonale bzw. in gegenüberliegenden Einträgen abseits der Diagonalen). Diese Matrizen sind offenbar linear unabhängig, außerdem läßt sich jede symmetrische Matrix als Linearkombination dieser Matrizen schreiben. Also bilden obige Matrizen eine Basis. Da man in der rechten oberen Dreiecksmatrix stets ein Element = 1 wählen kann und den Rest = 0, besteht diese Basis aus

$$n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Elementen, also $\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A \in P(\mathbb{K}^{n\times n})\}) = \frac{n(n+1)}{2}$.
Eine Basis der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen ($A^T = -A$) erhalten wir, wenn wir bei den Matrizen in (0.2) je eine der beiden Einsen durch eine -1 ersetzen. Die Matrizen in (0.1) fallen weg, da diese nicht schiefsymmetrisch sind. Damit erhalten wir $\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | P(A) = 0\}) = \frac{n(n-1)}{2}$
Hinweis: Später folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen sofort

$$\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A \in P(\mathbb{K}^{n\times n})\}) + \dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | P(A) = 0\}) = \dim(\mathbb{K}^{n\times n}) = n^2.$$

Aufgabe 84 (Tutorium)

a) Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = (1, 5\mathrm{i} - 1, 1 - \mathrm{i}, c^2)$ und der Untervektorraum

$$U = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2+2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.

Lösungsvorschlag

a) Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2+2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind Koeffizienten $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^4 x_n v_n = y$. Dies ist gleichbedeutend mit dem Lösen eines Gleichungssystems, dass als Spalten der Matrix die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ besitzt und als rechte Seite den Vektor y. Wir bringen die zugehörige erweiterte Matrix auf Stufenform.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}-1+c & 5\mathrm{i}-1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 2 & 0 & c^2+2c\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & c^2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}-1+c & 4\mathrm{i}-1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & \mathrm{i}+c & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & c^2+2c\mathrm{i} & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}-1+c & 4\mathrm{i}-1 \\ 0 & 0 & -c-2\mathrm{i} & 0 & 3i \\ 0 & 0 & c^2+2c\mathrm{i} & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}-1+c & 4\mathrm{i}-1 \\ 0 & 0 & -c-2\mathrm{i} & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2-+3c\mathrm{i}-2 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Matrix dem Rang der nicht erweiterten entspricht (also 3). Dies ist genau dann der Fall, wenn $(c+\mathrm{i})(c+2\mathrm{i}) = c^2+3c\mathrm{i}-2 = 0$ und $-c-2\mathrm{i} \neq 0$, also für ($c = -\mathrm{i}$ oder $c = -2\mathrm{i}$) und $c \neq -2\mathrm{i}$, also für $c = \mathrm{i}$. Für dieses c finden wir eine Lösung, womit $y \in U$ gilt, andernfalls gilt $y \notin U$.

b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erkennen wir mit dem üblichen Vorgehen, dass

$$\operatorname{Kern} A = \{x \in \mathbb{K}^3 \mid Ax = 0\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{K} \right\}$$

Folglich ist $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von Kern A und es gilt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$. Die Dimensionsformel liefert $\dim(\operatorname{Bild} A) = 3 - \dim(\operatorname{Kern} A) = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild} A$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$