Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
19.10.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

a) Seien A, B und C beliebige Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

(i) (Widerspruchsbeweis) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

(ii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$.

(iii) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

(iv) (Kontraposition) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

(v) (Falluntersch.) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$.

(vi) $[(A \vee B) \wedge C] \Leftrightarrow [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)]$.

b) Negieren Sie folgende Aussagen.

(i) Anton kommt immer zu spät zur Vorlesung, wenn Prof. Müller die Vorlesung hält.

(ii) Alle Menschen sind zu faul zu arbeiten und unfreundlich, oder sie sind kriminell.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sie haben Ihre drei Bekannten Anton, Berta und Chris zu sich eingeladen und wissen Folgendes:

- Wenn Chris nicht kommt, kommt auch Berta nicht.
- Berta oder Chris kommt, nicht aber beide.
- Entweder kommen sowohl Anton als auch Chris oder beide kommen nicht.

Es seien A, B bzw. C die Aussagen, dass Anton, Berta bzw. Chris kommt.

a) Drücken Sie die drei bekannten Tatsachen mittels dieser Aussagen und den bekannten Aussageverknüpfungen ($\neg$, $\wedge$, $\Rightarrow$, etc.) aus.

b) Entscheiden Sie mithilfe einer Wahrheitswerttafel, wer kommt.

Aufgabe 3 (Übung)

a) Beweisen Sie die zweite *De Morgansche Regel*: Sei I eine beliebige Indexmenge und für $\iota \in I$ sei $A_\iota \subseteq X$ mit Komplement $A_\iota^c = X \setminus A_\iota$ (allg.: $A^c := X \setminus A$). Zeigen Sie:

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \right)^c = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota^c.$$

Hinweis: $x \in \bigcap_{\iota \in I} A_\iota :\Leftrightarrow \forall \iota \in I \ : \ x \in A_\iota$ und $x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota :\Leftrightarrow \exists \iota \in I \ : \ x \in A_\iota$.

b) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ derart, dass eine Bijektion $\{0; 1; \ldots; n\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ existiert. Was muss für zwei endliche Mengen gelten, damit eine Bijektion zwischen ihnen existiert?

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n\mathbb{Z} := \{nz : \ z \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$zRw :\Leftrightarrow (z - w \in n\mathbb{Z})$$

für $z, w \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation R gegeben ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[0]_R$. Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen von R gibt es?

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (Tutorium)

a) Seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) $M_1 \subseteq M_2$, (ii) $M_1 \cap M_2 \supseteq M_1$, (iii) $M_1 \cup M_2 \subseteq M_2$.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen R Äquivalenz- bzw. Ordnungsrelationen sind. Dabei seien M und N nichtleere Mengen sowie (z_1, n_1) und (z_2, n_2) Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

(i) $MRN :\Leftrightarrow (M \subseteq N)$. (ii) $z_1 R z_2 :\Leftrightarrow |z_1 - z_2| < 5,2$. (iii) $(z_1, n_1)R(z_2, n_2) :\Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

Aufgabe 5 (Übung)

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g.

a) Zeigen Sie durch direkte Beweise:

(i) Sind f und g injektiv/surjektiv/bijektiv, so ist auch h injektiv/surjektiv/bijektiv.

(ii) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

b) Zeigen Sie durch indirekte Beweise:

(i) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(ii) Ist h injektiv, so ist auch f injektiv.

Hinweis: Machen Sie sich vor einem Beweis jeweils anhand eines einfachen Beispiels klar, was die Behauptung besagt.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Seien f, g und h wie in Aufgabe 5 gegeben. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweise:

(i) Ist g injektiv und h nicht injektiv, so ist f nicht injektiv.

(ii) Ist h injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Widerlegen Sie die folgenden falschen Aussagen durch je ein Gegenbeispiel.

(iii) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.

(iv) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \frac{x^2}{1-x}$ bijektiv ist.

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm1phys2015w/`.
- Sprechzeiten von Dr. Schmoeger: Dienstags, 10:00-11:00 Uhr (Raum 2.046) oder nach Vereinbarung per E-Mail (christoph.schmoeger@kit.edu).
- Sprechzeiten von Michael Hott: Montags, 14:00-16:00 Uhr (Raum 2.023) oder nach Vereinbarung per E-Mail (michael.hott@kit.edu).

Übungsbetrieb

- **WICHTIG**: Anmeldung für die Tutorien bis zum **23.10.2015** um **20 Uhr** unter **`http://www.redseat.de/kit-phys/`**. Die Einteilung wird am Samstag, den 24.10.2015, per E-Mail verschickt.
- Übungsblätter erscheinen wöchentlich (montags) auf obiger Webseite. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der darauffolgenden Woche besprochen.

Klausur

- Eine Probeklausur, die nur für Studierende mit Scheinpflicht (Anmeldung bei Dr. Nagato-Plum, Gebäude 20.30, Raum 2.029) obligatorisch ist, findet am 30.01.2016 von 10 bis 12 Uhr in Hörsälen Benz und Daimler (Gebäude 10.21) statt.
- Die **Modulprüfung** findet am **07.03.2016** von **8 bis 10 Uhr** statt. Anmeldeschluss ist der **13.02.2016**.