

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

11. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 61 (ÜBUNG)

- a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x) dx$ ($n \in \mathbb{N}$) her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x) dx = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x) dx = \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}.$$

- b) Beweisen Sie, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

AUFGABE 62 (TUTORIUM)

Berechnen Sie für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(lx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \sin(lx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(lx) dx.$$

AUFGABE 63 (ÜBUNG)

Zeigen Sie das nachfolgende.

- a) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $c_k \in \mathbb{R}$ mit $\int x^k e^{-x} dx = -\sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!} x^l e^{-x} + c_k$.
b) $\Gamma(k+1) := \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y x^k e^{-x} dx = k! \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

AUFGABE 64 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^1 (1+2x)^3 dx, & \text{b)} \int_{-2}^2 |x-1| dx, & \text{c)} \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \text{d)} \int_0^{\pi/4} \sin(x) \cos(x) dx, & \text{e)} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx, & \text{f)} \int_1^e \frac{1}{x(1+\log(x))} dx, \\ \text{g)} \int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx, & \text{h)} \int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx, & \text{i)} \int_0^1 x e^{(2x^2)} \sin(e^{(x^2)}) dx. \end{array}$$

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

AUFGABE 65 (ÜBUNG)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Man berechne

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^m dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration, um eine Rekursionsformel herzuleiten.

AUFGABE 66 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie, wo möglich, die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int \arcsin(x) dx,$

b) $\int e^{\sqrt{x}} dx,$

c) $\int (\log(x))^2 dx,$

d) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx,$

e) $\int e^x \sin(ax) dx,$

f) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} dx.$