Karlsruher Institut für Technologie

7. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Seien (a_n) und (b_n) Folgen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W ☐ F ☐ $H(a_n + b_n) = \{x + y : x \in H(a_n), y \in H(b_n)\}$.

b) W ☐ F ☐ $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

c) W ☐ F ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, (b_n) beschränkt $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

d) W ☐ F ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, (b_n) beschränkt $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert absolut.

e) W ☐ F ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert.

Aufgabe 2
Sei (a_n) eine Cauchyfolge.

a) Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es also eine konvergente Teilfolge von (a_n).

b) Zeigen Sie mit Teil a), dass (a_n) konvergiert.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge (a_n) sowie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$.

b) $a_n = (-1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1})^{n+1}$.

c) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$.

d) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Aufgabe 4
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir a_n durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 5
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}}$.

b) $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{3^k}$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Aufgabe 6
Wir betrachten die konvergenten Reihen

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Geben Sie in beiden Fällen $N \in \mathbb{N}$ an, für welches die N-te Partialsumme der Reihe den Reihenwert besser als 10^{-10} approximiert.

Aufgabe 7

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei I_n ein abgeschlossenes Intervall der Länge $l_n \in (0, \infty)$. Es gelte $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{R}$ mit $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ gibt. (*Prinzip der Intervallschachtelung*)

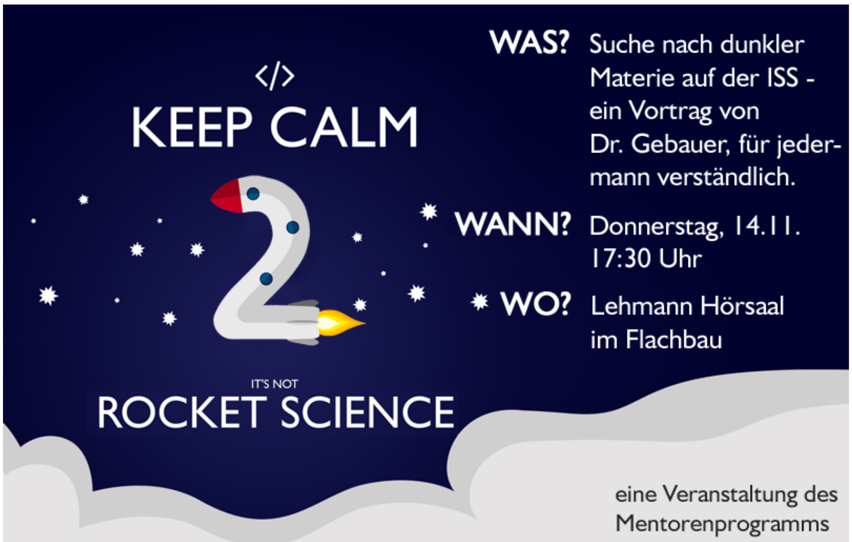
b) Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Wenn wir das Gegenteil annehmen, dann können wir $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben und erhalten damit
$$\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus \{x_n\}.$$
Führen Sie dies mit Hilfe von Teil a) zu einem Widerspruch.

c) Seien A und B Mengen. Seien $\varphi : A \to B$ und $\psi : B \to A$ injektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung zwischen A und B gibt.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.

Eine Information Ihrer Fachschaft.



https://fachschaft.physik.kit.edu/drupal/content/mentorenprogramm-ws-1920