UNIVERSITÄT KARLSRUHE Sommersemester 2009
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Die Leibnizformel für Determinanten besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}.$$

Die Elemente der S_3 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\det(A) = +2\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot(-1) = -4.$$

Bemerkung: Diese Methode zur Berechnung der Determinente ist recht ineffizient und wird daher kaum genutzt.

b) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\big) - 2\big(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1\big) + 4\big(-1\cdot(-1) - 1\cdot 1\big) = -4. \end{aligned}$$

c) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte (vgl. 15.2 (b)) und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1) = -4.$$

Aufgabe 2

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.
[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(A) =_{[S_1\to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4\to Z_4-Z_1]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} \; 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16.$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_4]} \; \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1, j=2,3,4]} \; \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} \; 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 3

Wir verwenden vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.
IA: $n = 2$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2} (x_k - x_j)\,.$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ beliebig. Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \cdots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \cdots & y_2^{n-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \cdots & y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \cdots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (y_k - y_j) \quad \text{für alle } y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (IV)}.$$

Seien nun $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

multiplizieren wir zuerst die vorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der letzten ab. Dann multiplizieren wir die vorvorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der vorletzten ab, usw. Die letzte Umformung besteht darin, das x_1-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abzuziehen. Für $k = n+1, n, \ldots, 3, 2$ ziehen wir also nacheinander das x_1-fache der $(k-1)$-ten Spalte von der k-ten Spalte ab. Im Anschluss entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \ldots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix}$$

Nun können wir aus der ersten Zeile dieser Matrix den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der zweiten Zeile $(x_3 - x_1)$ etc. und aus der letzten Zeile den Faktor $(x_{n+1} - x_1)$:

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1)}_{= \prod_{1 < l \leqslant n+1} (x_l - x_1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese $n \times n$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix. Gemäß Induktionsvoraussetzung mit $y_m = x_{m+1}$ (für $m = 1, 2, \ldots, n$) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_{k+1} - x_{j+1}) = \prod_{2 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 < l \leqslant n+1} (x_l - x_1) \cdot \prod_{2 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i).$$

Aufgabe 4

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach $\mathbb{C}$.
Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. [Verwende n-mal (D2)]

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1} A^\top A^2 A^\top A^{-1}) = (\det A)^2$.
Ja, denn für eine reguläre Matrix A gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz und der

Folgerung in 15.7

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}A^\top A^2 A^\top A^{-1}) &= \det(A^{-1})\ \det(A^\top)\ \det(A^2)\ \det(A^\top)\ \det(A^{-1})\\ &= \frac{1}{\det(A)}\ \det(A)\,(\det(A))^2\ \det(A)\,\frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^2\,.\end{aligned}$$

c) $\det(A+B) = \det A + \det B$?
Nein (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$).
Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 4\det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

d) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl (vgl. Erläuterung im **a)**-Teil).

Aufgabe 5

Mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ bezeichnen wir die Matrix des Gleichungssystems, mit b die rechte Seite. Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn A regulär ist; wegen

$$\det(A) =_{\left[\substack{Z_2\to Z_2+Z_1\\ Z_3\to Z_3-2Z_1}\right]} \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix} =_{[\text{Entw. nach } S_1]} \det\begin{pmatrix}5 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

ist dies der Fall. Nach der Cramerschen Regel gilt dann

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(A)}\,, \qquad x_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(A)}\,, \qquad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b\,)}{\det(A)}\,.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} =_{[Z_3\to Z_3+Z_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} = -\frac{13}{15}\,.\end{aligned}$$

Auch bei x_2 und x_3 addieren wir jeweils die erste Zeile zur dritten und entwickeln dann nach der zweiten bzw. dritten Spalte:

$$x_2 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\,,$$

$$x_3 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,.$$

Aufgabe 6

a) Wegen

$$\begin{aligned} \sigma\circ\pi(1) &= \sigma(\pi(1)) = \sigma(4) = 1, & \sigma\circ\pi(2) &= \sigma(\pi(2)) = \sigma(3) = 4,\\ \sigma\circ\pi(3) &= \sigma(\pi(3)) = \sigma(2) = 2, & \sigma\circ\pi(4) &= \sigma(\pi(4)) = \sigma(1) = 3\end{aligned}$$

ist

$$\sigma\circ\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\pi\circ\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

b) Um $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ zu bestimmen, vertauschen wir die obere Zeile von $\sigma \circ \pi$ mit der unteren Zeile und sortieren anschließend die Spalten so, dass die obere Zeile wieder korrekt dasteht:

$$(\sigma \circ \pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus

$$\pi^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt.

c) Eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, welche zwei Elemente j, k mit $1 \leqslant j < k \leqslant n$ vertauscht und die restlichen festlässt, heißt Transposition. Diese bezeichnen wir mit τ_{jk}, also

$$\tau_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & k & j+1 & \ldots & k-1 & j & k+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Um σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen zu schreiben, gehen wir schrittweise vor: Zunächst sorgen wir durch Vertauschen von 1 und 3 dafür, dass die 1 korrekt abgebildet wird. Dabei wird aber die 3 falsch positioniert (3 würde jetzt mit der 1 vertauscht werden, 3 soll aber auf 4 gehen), also stellt man im nächsten Schritt die 3 durch Vertauschen von 1 mit 4 richtig. Schließlich hat man soeben 4 mit 1 getauscht. Da auch die 2 korrekt abgebildet wird, ist man fertig und erhält als Endergebnis $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13}$.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, z.B. gilt auch $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13}$ oder $\sigma = \tau_{34} \circ \tau_{14}$.

Da σ als Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann, ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ nach Beispiel (2) in 15.6. Dies lässt sich natürlich auch anhand der Definition des Signums einsehen:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Die Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $i < j$ lauten

$$(1,2), \quad (1,3), \quad (1,4), \quad (2,3), \quad (2,4), \quad (3,4).$$

Daher ergibt sich für obiges Produkt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2-1} \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3-1} \frac{\sigma(4) - \sigma(1)}{4-1} \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3-2} \frac{\sigma(4) - \sigma(2)}{4-2} \frac{\sigma(4) - \sigma(3)}{4-3} \\ &= \frac{2-3}{1} \frac{4-3}{2} \frac{1-3}{3} \frac{4-2}{1} \frac{1-2}{2} \frac{1-4}{1} = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(x \times y|x) = (\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf x als auch orthogonal auf y steht]. Für den Winkel φ, den die Vektoren x und y einschließen, gilt

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Hieraus folgt $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}\,.$$