UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2}Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \mathrm{Kern}(A - 18I_3) = \{s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + 2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B-I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Aufgabe 2

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 + S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_4]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 - S_3]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_3]} (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda) - 3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir x_4 beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \mathrm{lin}\{c_1\}, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 - Z_1 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_1}]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \operatorname{lin}\{c_2, c_3, c_4\}, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als symmetrische Matrix diagonalisierbar. Da c_1 eine Basis von $E_A(0)$ und c_2, c_3, c_4 eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten c_1, c_2, c_3, c_4

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch ist, gibt es eine sogar orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um eine solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume.

Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist gegeben durch $b_1 := \dfrac{1}{\|c_1\|}\, c_1 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren (vgl. 14.21, HM I):

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{b}_3 := c_3 - (c_3|b_2)b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_3\|}\, \widetilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{b}_4 := c_4 - (c_4|b_2)b_2 - (c_4|b_3)b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_4\|}\, \widetilde{b}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bilden b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.
Besitzt die Matrix P die Spalten b_1, b_2, b_3, b_4, dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a,b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ -3+\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

[Schritte: erste Zeile von der zweiten abgezogen, erste Spalte zur zweiten addiert, dann nach der 2. Zeile entwickelt]

Wegen $\chi_M(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{2, 3\}$ besitzt M die Eigenwerte 2 mit zweifacher algebraischer Vielfachheit und 3 mit einfacher algebraischer Vielfachheit.

Eigenraum zu 2: Wegen

$$M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + 2Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$E_M(2) = \mathrm{Kern}(M - 2I_3) = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Eigenraum zu 3: Eine ähnliche Rechnung ergibt

$$E_M(3) = \mathrm{Kern}(M - 3I_3) = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}.$$

Da beide Eigenräume eindimensional sind, haben beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1.

c) M besitzt maximal zwei linear unabhängige Eigenvektoren, etwa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) M ist nicht diagonalisierbar, weil für den Eigenwert 2 die geometrische Vielfachheit ungleich der algebraischen Vielfachheit ist.

Alternative Begründung: M ist nicht diagonalisierbar, sonst müßte M drei linear unabhängige Eigenvektoren haben. *ODER AUCH:* M ist nicht diagonalisierbar, weil es keine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von M gibt (vgl. **c)**-Teil).

Aufgabe 4

Für jedes α ist die reelle Matrix A_α symmetrisch; nach dem Satz in 16.8 gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P$ Diagonalgestalt hat. Wir wissen zudem: Bei jedem derartigen P stehen in der Diagonale von $P^T A_\alpha P$ die Eigenwerte von A. Die Frage lautet also: Für welche α besitzt A_α die Eigenwerte 1, 2 und 3? Die Matrix

$$A_\alpha - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist (unabhängig von α) singulär; somit ist 1 stets ein Eigenwert von A_α. Wegen

$$A_\alpha - 2I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -3+\alpha \end{pmatrix}$$

ist 2 stets ein Eigenwert von A_α (unabhängig von α). Schließlich haben wir noch

$$A_\alpha - 3I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -5+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann singulär, wenn die erste und dritte Zeile linear abhängig sind, wenn also $-5+\alpha = 1-\alpha$ gilt, d. h. $\alpha = 3$. Somit hat A_α nur im Fall $\alpha = 3$ den Eigenwert 3.
Bemerkung: Nachdem wir gezeigt haben, dass 1 und 2 Eigenwerte von A_α sind, können wir bei der Untersuchung, wann die Matrix A_α die Eigenwerte $1, 2, 3$ besitzt, auch auf die Betrachtung von $A_\alpha - 3I_3$ verzichten und stattdessen mit Hilfe der Spur von A_α argumentieren. Da die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte (gemäß ihrer algebraischen Vielfachheiten wiederholt, vgl. Folgerung in 16.9) ist, erhalten wir

$$3 \text{ ist Eigenwert von } A_\alpha \iff \operatorname{Spur}(A_\alpha) = 6 \iff \tfrac{1}{2}\big((1+\alpha)+4+(1+\alpha)\big) = 6 \iff \alpha = 3.$$

Fazit: Genau für $\alpha = 3$ gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Setzen wir $\alpha = 3$ in die Matrizen ein, die wir oben erhalten haben, so können wir ablesen:

$$E_{A_3}(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(2) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(3) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Die Spalten der Matrix P sind dann normierte Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

a) Setze zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 5$$

ist 5 der einzige Eigenwert von A.

b) Setze zum Beispiel $B := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Gemäß Beispiel (2) in 16.1 sind a, b, c, d die Eigenwerte der Diagonalmatrix B. Nach Voraussetzung sind diese reell und paarweise verschieden.

c) Es ist $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Wegen $\chi_C(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, -1, 1, -2, 2\}$ sind $0, -1, 1, -2, 2$ die Eigenwerte von C.

Somit hat zum Beispiel $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ die geforderte Eigenschaft.

d) Die Matrix $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ besitzt genau den Eigenwert 1. Der zugehörige Eigenraum ist $E_D(1) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, so dass D nur einen linear unabhängigen Eigenvektor hat.

Aufgabe 6

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. $v \in V \setminus \{0\}$ sei ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\varphi(v) = \lambda v$.

a) Es gilt $(\varphi + 5\,\mathrm{id}_V)(v) = \varphi(v) + 5\,\mathrm{id}_V(v) = \lambda v + 5v = (\lambda + 5)v$, d.h. v ist ein Eigenvektor von $\varphi + 5\,\mathrm{id}_V$ zum Eigenwert $\lambda + 5$.

b) Es ist $\varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$. Dass $\varphi^n(v) = \lambda^n v$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, zeigen wir mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$. $\varphi(v) = \lambda v$ gilt nach Voraussetzung.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\varphi^n(v) = \lambda^n v$ (IV). Dann folgt:

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi(\varphi^n(v)) \overset{\text{(IV)}}{=} \varphi(\lambda^n v) = \lambda^n \varphi(v) = \lambda^n \lambda v = \lambda^{n+1} v.$$

Damit ergibt sich für ein beliebiges Polynom $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$

$$p(\varphi)(v) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi^n(v) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n v = p(\lambda)v.$$

(Hierbei ist $\varphi^0 := \mathrm{id}_V$ gesetzt.) Also ist v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Sei $x \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von φ^2 zum Eigenwert μ^2, d.h. $\varphi^2(x) = \lambda^2 x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V) \circ (\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) &= (\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V)((\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x)) = (\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V)(\varphi(x) + \mu x) \\ &= \varphi(\varphi(x) + \mu x) - \mu(\varphi(x) + \mu x) \qquad (1) \\ &= \varphi(\varphi(x)) + \varphi(\mu x) - \mu\varphi(x) - \mu^2 x \\ &= \varphi^2(x) - \mu^2 x = 0.\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $(\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) = 0$, d.h. $\varphi(x) + \mu x = 0$.
Dann gilt $\varphi(x) = -\mu x$, d.h. x ist ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $-\mu$.

2. Fall: $(\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) \neq 0$, d.h. $\varphi(x) + \mu x \neq 0$.
Aus (1) folgt $\varphi(\varphi(x) + \mu x) = \mu(\varphi(x) + \mu x)$. Daher ist $\varphi(x) + \mu x$ ($\neq 0$) ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert μ.

Aufgabe 7

a) Die Darstellungsmatrix A von φ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 lautet

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ bilden die Vektoren c_1, c_2, c_3 genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn sie linear unabhängig sind. Um die lineare Unabhängigkeit von c_1, c_2, c_3 zu zeigen, schreiben wir

$$c_1 := e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_2 := e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Spalten in eine Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und weisen nach, dass diese vollen Rang hat. Dazu berechnen wir die inverse Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \leftrightarrow -Z_3]{Z_2 \to -Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Da die Matrix mit den Spalten c_1, c_2, c_3 invertierbar ist, besitzt diese vollen Rang, so dass c_1, c_2, c_3 linear unabhängig sind.

Die Darstellungsmatrix $\widetilde{A}$ von φ bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 erhält man durch $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, wobei $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Darstellungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist, wenn man "vorne" die Basis c_1, c_2, c_3 und "hinten" die Basis e_1, e_2, e_3 nimmt, d.h. S bildet die Koordinaten eines Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 auf die Koordinaten von v bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 ab.

Die Koordinaten von c_1 bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 lauten $(1, 0, 0)$ und die Koordinaten von c_1 bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 lauten $(1, 1, 1)$. Folglich muss

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten, d.h. die erste Spalte von S ist gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entsprechende Überlegungen für c_2 und c_3 führen auf

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von S haben wir bereits zu Beginn bestimmt. Für die Darstellungsmatrix $\widetilde{A}$ von φ bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 ergibt sich

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -4 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Darstellung der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 lässt sich an der Matrix S^{-1} ablesen, weil S^{-1} der Darstellungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ entspricht, wenn man "vorne" die Basis e_1, e_2, e_3 und "hinten" die Basis c_1, c_2, c_3 nimmt. Deshalb ergibt sich

$$e_1 = c_1 + c_2 - c_3\,, \qquad e_2 = c_1 - c_3\,, \qquad e_3 = -c_1 - c_2 + 2c_3\,.$$

Aufgabe 8

a) Die beiden Vektoren haben offenbar Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander. Das Kreuzprodukt dieser Vektoren ist orthogonal zu beiden und hat zudem Norm 1 (denn $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren a und b ist). Wir wählen also

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

als dritten Vektor.

b) Auch hier gilt: Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$(z \,|\, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}) = 0 \qquad \text{und} \qquad (z \,|\, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}) = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor z müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.