UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
30.04.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S an so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die geometrische und algebraische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.

c) Geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von M an.

d) Entscheiden Sie, ob M diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt? Geben Sie das jeweilige P an.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.

b) $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.

c) $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C.

d) $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und es gibt nur einen linear unabhängigen Eigenvektor von D.

Aufgabe 6

Gegeben sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$. $v \in V \setminus \{0\}$ sei ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) v ist ein Eigenvektor von $\varphi + 5\,\mathrm{id}_V$ zum Eigenwert $\lambda + 5$.

b) v ist ein Eigenvektor von φ^n zum Eigenwert λ^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Allgemein gilt für jedes Polynom p, dass v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$ ist.

Hierbei ist φ^n durch $\varphi^n := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\text{-mal}}$ definiert.

c) Ist μ^2 ein Eigenwert von φ^2, so ist μ oder $-\mu$ ein Eigenwert von φ.
Hinweis: Betrachten Sie $(\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V) \circ (\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)$.

Aufgabe 7

Es sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Durch

$$\varphi(e_1) := 2e_1 + 3e_3, \qquad \varphi(e_2) := -e_1 + 2e_2 - 4e_3, \qquad \varphi(e_3) := e_1 - 2e_2$$

wird eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich e_1, e_2, e_3.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$c_1 := e_1 + e_2 + e_3, \qquad c_2 := e_1 - e_2, \qquad c_3 := e_1 + e_3$$

eine weitere Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ gegeben ist.

Stellen Sie jeden Einheitsvektor e_1, e_2, e_3 bezüglich dieser Basis dar, und geben Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich c_1, c_2, c_3 an.

Aufgabe 8

Ergänzen Sie jeweils einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer orthogonalen bzw. unitären Matrix bilden.

a) $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 6 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.