UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ können wir die Quadrik-Gleichung $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{3}\,x_3 + 3 = 0$ in der Form

$$x^TAx + 2b^Tx + c = 0\,, \quad \text{wobei} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad c := 3\,,$$

schreiben.

b) Zur Bestimmung der Eigenwerte von A berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + \lambda Z_2 \\ Z_3 \to Z_3 + Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & \lambda - 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & \lambda-1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\big((1-\lambda^2)(1-\lambda) + (1-\lambda)^2\big)$$

$$= -\big((1+\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2\big) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda+1) = -(1-\lambda)^2(2+\lambda).$$

Die Matrix A hat also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$A + 2I_3 \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_2]{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_1]{Z_2 \to Z_2 + \frac{2}{3}Z_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{3}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$ der Eigenraum

$$E_A(-2) = \operatorname{lin}\{c_1\}\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 1$ betrachten wir

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich der zweidimensionale Eigenraum

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\{c_2, c_3\}\,, \qquad \text{wobei} \quad c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A können wir via $v_1 := \frac{1}{\|c_1\|}\, c_1$, $v_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2$ und $v_3 := v_1 \times v_2$ definieren. Dann gilt $V^T A V = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: D$ bzw. $A = VDV^T$ für die orthogonale Matrix

$$V := (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \det V = 1.$$

d) Zur Bestimmung der Normalform betrachten wir das lineare Gleichungssystem $-Ap = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 & -\sqrt{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3]{Z_2 \to Z_2 - \frac{1}{2} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right).$$

Folglich besitzt $-Ap = b$ die eindeutige Lösung $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1, -1, -1)$. Damit sind die neuen Koordinaten $y = (y_1, y_2, y_3)$ gegeben durch $x = Vy + p$, also durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

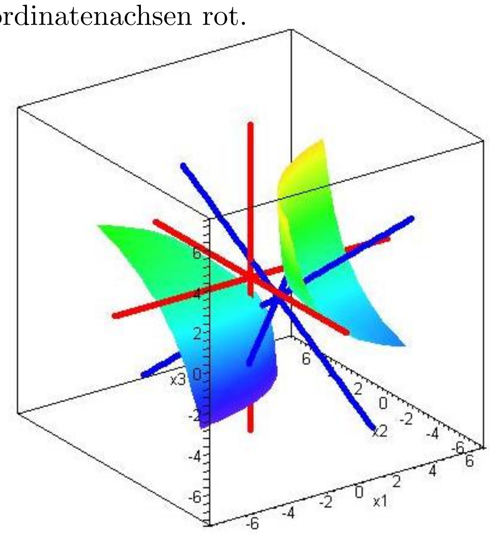
Wegen

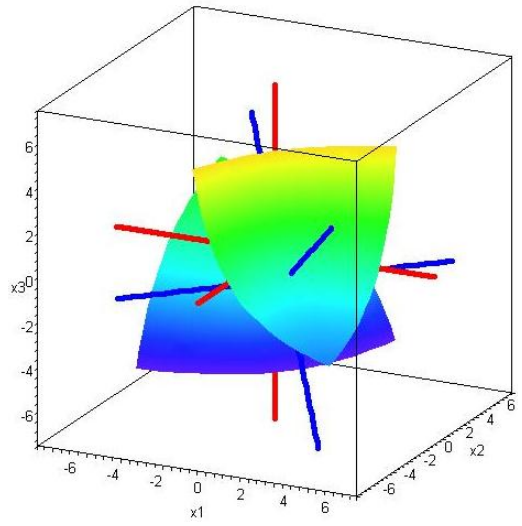
$$b^T p + c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

erhalten wir als Gleichung der Quadrik Q in den neuen Koordinaten y

$$-2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\left(\frac{y_1}{\sqrt{3/4}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Q ist ein sog. zweischaliges Hyperboloid. Die Hauptachsen sind $p + \mathrm{lin}\{v_1\}$, $p + \mathrm{lin}\{v_2\}$, $p + \mathrm{lin}\{v_3\}$. Auf den Schaubildern ist die Quadrik nach der Hauptachsentransformation aus verschiedenen Perspektiven abgebildet. Die Hauptachsen sind dabei blau, die ursprünglichen Koordinatenachsen rot.





Aufgabe 2

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium von Hurwitz aus 16.10. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für $x := e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad x^T Bx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $y := e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$By = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad y^T By = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass B nicht positiv definit ist, kann man auch mit dem Kriterium von Hurwitz argumentieren: Da für die zweite Hauptunterdeterminante $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$ gilt, ist B nicht positiv definit.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiere $(x|y)_A = y^T Ax \in \mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass $(\cdot|\cdot)_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist, sind nachzuweisen

(S1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $(x|y)_A = (y|x)_A$,
(S2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha x + y|z)_A = \alpha(x|z)_A + (y|z)_A$,
(S3) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $(x|x)_A > 0$.

Zu (S1): Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen der Symmetrie von A (d.h. $A = A^T$)

$$(x|y)_A = y^T A x = (y^T A x)^T = x^T A^T (y^T)^T = x^T A y = (y|x)_A.$$

Zu (S2): Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\alpha x + y|z)_A = z^T A(\alpha x + y) = \alpha z^T A x + z^T A y = \alpha(x|z)_A + (y|z)_A.$$

Zu (S3): Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $(x|x)_A = x^T A x > 0$, weil A positiv definit ist.

Aufgabe 4

a) Gemäß Beispiel (1) in 17.3 [mit $a(x) = \sin x$] ist jede Lösung von $y'(x) = y(x) \cdot \sin x$ gegeben durch $y(x) = ce^{-\cos x}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Dass dies tatsächlich alle Lösungen sind, kann man auch folgendermaßen einsehen: Ist w eine weitere Funktion, die der Gleichung $w'(x) = w(x) \cdot \sin x$ genügt, so gilt

$$\left(\frac{w(x)}{y(x)}\right)' = \frac{w'(x)y(x) - w(x)y'(x)}{y^2(x)} = \frac{w(x)\sin(x)y(x) - w(x)y(x)\sin(x)}{y^2(x)} = 0.$$

Der Quotient w/y ist also konstant, d.h. es gilt $w(x) = Cy(x)$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Differentiation der Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung liefert für jedes $x \in (-1, 1)$

$$y'(x) = y(x).$$

(Beachte: y ist differenzierbar, weil die rechte Seite $x \mapsto \int_0^x y(t)\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar ist.)

Laut Beispiel (1) in 17.3 [mit $a(x) = 1$] ist $y(x) = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Gemäß der ursprünglichen Gleichung gilt insbesondere für $x = 0$: $c = y(0) = \int_0^0 y(t)\,dt = 0$, d.h. nur $y(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllt die gegebene Gleichung.

Aufgabe 5

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} i'(t) &= -\frac{R}{L}\,i(t) + \frac{1}{L}\,u(t), \\ i(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

lösen wir mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 17.4 [mit $y = i$, $x = t$, $x_0 = y_0 = 0$, $I = [0, \infty)$, $a(x) = -\frac{R}{L}$, $b(x) = b(t) = \frac{1}{L}\,u(t) = \frac{A}{L}\,\sin(\omega t)$]. Danach ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 \cdot e^{\int_0^t -\frac{R}{L}\,d\tau} + e^{\int_0^t -\frac{R}{L}\,d\tau} \cdot \int_0^t e^{-\int_0^\tau -\frac{R}{L}\,ds}\,\frac{A}{L}\,\sin(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{A}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0, \infty). \end{aligned} \tag{2}$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau &= \left[e^{\frac{R}{L}\tau}\frac{-\cos(\omega\tau)}{\omega}\right]_{\tau=0}^t + \int_0^t \frac{R}{L}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\cos(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\cos(\omega\tau)\,d\tau \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\left(\left[e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\right]_{\tau=0}^t - \int_0^t \frac{R}{L}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau\right) \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\,e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

woraus

$$\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau = -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{R}{\omega^2 L}\,e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)$$
$$= \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\omega^2 L}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{1}{\omega}$$

bzw.

$$\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau = \frac{\frac{1}{\omega^2 L}}{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}\,e^{\frac{R}{L}t}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{\frac{1}{\omega}}{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}$$
$$= \frac{L}{\omega^2L^2+R^2}\,e^{\frac{R}{L}t}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}$$

folgt. Einsetzen in (2) ergibt für $t \geqslant 0$

$$i(t) = \frac{A}{\omega^2L^2+R^2}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{\omega AL}{\omega^2L^2+R^2}\,e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Aufgabe 6

a) Die gegebene Differentialgleichung $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$ ist eine Gleichung mit getrennten Veränderlichen. Das Anfangswertproblem $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$, $y(1) = 0$ lösen wir mit der in Abschnitt 17.3 vorgestellten Methode $[f(x) = e^x,\ g(y) = e^{-y}e^{-e^y},\ x_0 = 1,\ y_0 = 0]$. Wegen $g(y_0) = e^{-1} \neq 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$\int_0^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für das Integral auf der linken Seite ergibt sich

$$\int_0^{y(x)} e^{\eta}e^{e^{\eta}}\,d\eta = \big[e^{e^{\eta}}\big]_{\eta=0}^{y(x)} = e^{e^{y(x)}} - e,$$

das Integral auf der rechten Seite ist gleich

$$\int_1^x f(t)\,dt = \big[e^t\big]_{t=1}^x = e^x - e.$$

Dies führt auf $e^{e^{y(x)}} = e^x$. Somit ist $y(x) = \ln(\ln(e^x)) = \ln x$ die auf $(0,\infty)$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

b) Die Gleichung lässt sich für $x \neq 0$ in der Form

$$y' = \frac{1+y^2}{y}\,\frac{1}{x(1+x^2)}$$

schreiben. Es handelt sich um getrennte Veränderliche mit

$$g(y) = \frac{1+y^2}{y}, \qquad f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Die Lösung y des Anfangswertproblems ist gegeben durch (Beachte: $g(2) = 5/2 \neq 0$)

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für den Integranden auf der rechten Seite gilt

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\,,$$

und damit bekommt man für das Integral der rechten Seite

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}\,dt = \big[\ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\big]_1^x = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Außerdem gilt

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_2^{y(x)} \frac{\eta}{1+\eta^2}\,d\eta = \big[\tfrac{1}{2}\ln(1+\eta^2)\big]_2^{y(x)} = \tfrac{1}{2}\ln(1+y(x)^2) - \tfrac{1}{2}\ln 5.$$

Gleichsetzen der Integrale und Multiplikation mit 2 liefert

$$\ln(1+y(x)^2) = \underbrace{2\ln|x|}_{=\ln x^2} - \ln(1+x^2) + \underbrace{\ln 2 + \ln 5}_{=\ln 10}$$

bzw.

$$1 + y(x)^2 = e^{\ln x^2} \cdot \frac{1}{e^{\ln(1+x^2)}} \cdot e^{\ln 10} = \frac{10x^2}{1+x^2}.$$

Die Lösung ist somit

$$y(x) = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1} = \sqrt{\frac{9x^2-1}{1+x^2}}\,,$$

und zwar für $x > \frac{1}{3}$. (Dabei ergibt sich das Vorzeichen der Wurzel aus $y(1) = 2 > 0$.)

Aufgabe 7

a) Bei dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$x^3y' + (2-3x^2)y = 0, \qquad \text{also} \qquad y' = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right)y \quad \text{auf } (0,\infty)\,.$$

Diese besitzt die Lösungen $y(x) = Ce^{A(x)}$, wobei C ganz $\mathbb{R}$ durchläuft und A irgendeine Stammfunktion von $a(x) := -2/x^3 + 3/x$ ist. Dies bedeutet für $x > 0$

$$y(x) = C\exp\big(x^{-2} + 3\ln x\big) = Cx^3e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$ verschaffen wir uns mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = C(x)y_\mathrm{h}(x)$ mit $y_\mathrm{h}(x) := x^3e^{1/x^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x^3y_\mathrm{p}' + (2-3x^2)y_\mathrm{p} &= x^3\big(C'(x)y_\mathrm{h} + C(x)y_\mathrm{h}'\big) + (2-3x^2)C(x)y_\mathrm{h} \\ &= x^3C'(x)y_\mathrm{h} + \big(x^3y_\mathrm{h}' + (2-3x^2)y_\mathrm{h}\big)C(x) = x^3C'(x)y_\mathrm{h}\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass y_h die homogene Gleichung löst. Damit y_p die inhomogene Gleichung löst, muss mithin $x^3C'(x)y_\mathrm{h} = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_\mathrm{h}(x) = x^{-3}e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist z.B. für $C(x) = \frac{1}{2}e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich $y_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}x^3$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf $(0,\infty)$ ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + Cy_\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + Cx^3e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

b) Die zugehörige homogene Gleichung $y' = (-\cos x)y$ hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = C\exp\Big(-\int \cos x\,dx\Big) = Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Um eine spezielle Lösung y_{p} der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\sin x}$ (Variation der Konstanten). Dann haben wir

$$y_{\mathrm{p}}' + y_{\mathrm{p}}\cos x = \big(C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x\big) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = C'(x)e^{-\sin x}.$$

Somit ist y_{p} eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x$ gilt, d. h. wir suchen eine Funktion C mit

$$C'(x) = (\sin x\cos x)e^{\sin x}.$$

Partielle Integration (mit $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$) liefert

$$C(x) = (\sin x)e^{\sin x} - \int(\cos x)e^{\sin x}\,dx = (\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x}.$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir damit

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\sin x} = \sin x - 1,$$

und die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung lautet dann

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + Ce^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Hier gilt $y(0) = -1 + C$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist daher für $C = 2$ erfüllt; das Anfangswertproblem hat folglich die Lösung $y(x) = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

Bemerkung: Man könnte hier natürlich auch die Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 17.4 verwenden.

c) Hier handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \tfrac{9}{4}\,\lambda = \lambda\big(\lambda^2 + 3\lambda + \tfrac{9}{4}\big) = \lambda\big(\lambda + \tfrac{3}{2}\big)^2$$

besitzt die einfache Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und die zweifache Nullstelle $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Somit ist ein Fundamentalsystem von $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$ gegeben durch

$$e^{0\cdot x},\ e^{-\frac{3}{2}x},\ xe^{-\frac{3}{2}x}$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$ lautet

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-\frac{3}{2}x} + c_3xe^{-\frac{3}{2}x} \qquad \text{für Konstanten } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\tfrac{3}{2}c_2e^{-\frac{3}{2}x} + c_3e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{3}{2}c_3xe^{-\frac{3}{2}x}, \\ y''(x) &= \tfrac{9}{4}c_2e^{-\frac{3}{2}x} - 3c_3e^{-\frac{3}{2}x} + \tfrac{9}{4}c_3xe^{-\frac{3}{2}x}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0, \\ y'(0) &= -\tfrac{3}{2}c_2 + c_3 \overset{!}{=} 0, \\ y''(0) &= \tfrac{9}{4}c_2 - 3c_3 \overset{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in c_1, c_2, c_3, welches die eindeutige Lösung $c_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = -\frac{4}{9}, c_3 = -\frac{2}{3}$ besitzt. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{9}e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{2}{3}xe^{-\frac{3}{2}x}.$$

Aufgabe 8

a) Das charakteristische Polynom der Gleichung $y''+4y'-5y=0$, also $\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda+5)$, besitzt die einfachen Nullstellen 1 und -5. Daher ist $e^x,\ e^{-5x}$ ein Fundamentalsystem, d.h. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-5x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, ist die allgemeine Lösung von $y''+4y'-5y=0$.

b) Hier lautet das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2-6\lambda+25$. Dieses hat die einfachen Nullstellen $3\pm4i$. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $e^{3x}\sin(4x),\ e^{3x}\cos(4x)$, so dass die allgemeine Lösung von $y''-6y'+25y=0$ durch $y(x)=c_1e^{3x}\sin(4x)+c_2e^{3x}\cos(4x)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, gegeben ist.

c) Das charakteristische Polynom von $y'''-y''+y'-y=0$ ist $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)$. Da dieses die einfachen Nullstellen $1,-i,i$ besitzt, ist $e^x,\ \sin x,\ \cos x$ ein zugehöriges Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung von $y'''-y''+y'-y=0$ lautet folglich $y(x)=c_1e^x+c_2\sin x+c_3\cos x$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

d) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ lautet $\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)$ und besitzt die einfachen Nullstellen $0,1,-2i,2i$. Deshalb ist $1,\ e^x,\ \sin(2x),\ \cos(2x)$ ein Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung von $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ ergibt sich $y(x)=c_1+c_2e^x+c_3\sin(2x)+c_4\cos(2x)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

e) Hier ist das charakteristische Polynom gleich λ^4+1. Aufgrund von

$$\begin{aligned}\lambda^4=-1 \quad&\iff\quad \lambda^2=i \text{ oder } \lambda^2=-i \quad\iff\quad \lambda^2=e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ oder } \lambda^2=e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &\iff\quad \lambda=e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{-i\frac{\pi}{4}}\\ &\iff\quad \lambda=\tfrac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1-i}{\sqrt{2}} \text{ oder } \lambda=\tfrac{1-i}{\sqrt{2}} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

sind $\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ die (einfachen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit ist $e^{x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}),\ e^{x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2}),\ e^{-x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}),\ e^{-x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})$ ein Fundamentalsystem von $y^{(4)}+y=0$ und die allgemeine Lösung lautet $y(x)=c_1e^{x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2})+c_2e^{x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})+c_3e^{-x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2})+c_4e^{-x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 9

Das System

$$\begin{aligned}u'&=8u-6v,\\ v'&=9u-7v\end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}8&-6\\ 9&-7\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix}8-\lambda&-6\\ 9&-7-\lambda\end{pmatrix}=(8-\lambda)(-7-\lambda)+9\cdot6=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1=-1$ und $\lambda_2=2$ die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1)=\mathrm{Kern}(A+I_2)=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}9&-6\\ 9&-6\end{pmatrix}=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}3&-2\\ 0&0\end{pmatrix}=\mathrm{lin}\{\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\}$$

und

$$E_A(2)=\mathrm{Kern}(A-2I_2)=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}6&-6\\ 9&-9\end{pmatrix}=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}1&-1\\ 0&0\end{pmatrix}=\mathrm{lin}\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\}.$$

Da die Eigenvektoren $(2,3),(1,1)$ von A eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, ist A diagonalisierbar und für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Außerdem ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \qquad &\iff \qquad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \quad \text{und} \quad \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\iff \qquad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \quad \text{und} \quad \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (3).