UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

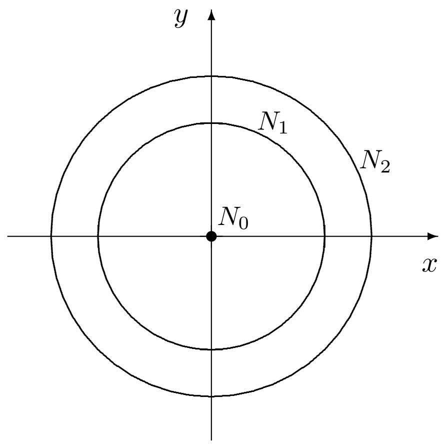
Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

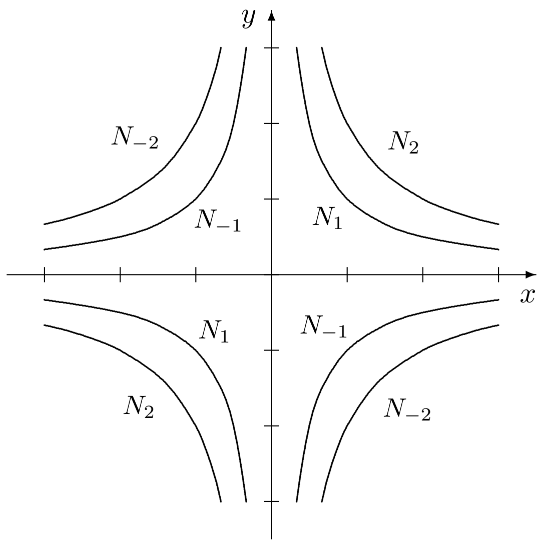
• Die Niveaulinie $N_c(f)$ ergibt sich aus der Gleichung $f(x,y) = c$, also

$$x^2 + y^2 = c\,.$$

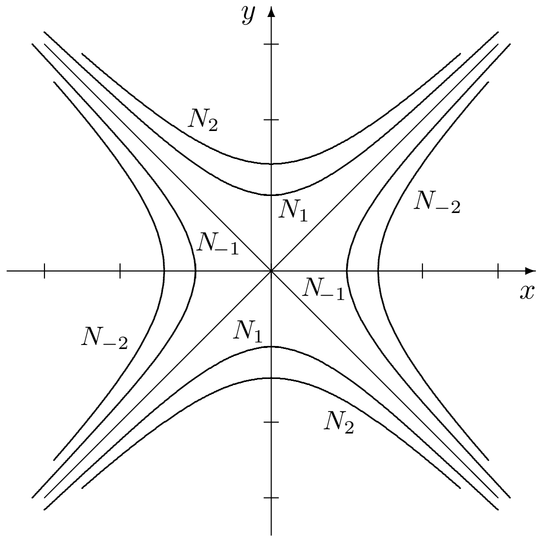
Für $c < 0$ erhalten wir die leere Menge, für $c = 0$ nur den Nullpunkt und für $c > 0$ einen Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{c}$. Dies ergibt die folgende Skizze, wobei der kleinere Kreis den Radius 1 und der größere den Radius $\sqrt{2}$ hat:



• Die Gleichung $xy = c$ hat für $c = 0$ die Lösungsmenge $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oder } y = 0\,\}$. Für $c \neq 0$ erhält man das Schaubild der Funktion $y = c/x$, die Niveaulinien sind also Hyperbeln. Die Skizze sieht wie folgt aus, wobei N_0 aus den beiden Achsen besteht:



• Hier erhalten wir die Gleichung $y^2 = c + x^2$, also $|y| = \sqrt{c + x^2}$ bzw. $y = \pm\sqrt{c + x^2}$. Es ergibt sich das folgende Bild, wobei N_0 aus den beiden Winkelhalbierenden besteht:



Bemerkung: Wegen $h(x,y) = (y-x)(y+x)$ erhalten wir das gleiche Bild wie bei der Funktion g, allerdings gedreht und mit anderen Längen.

Aufgabe 2

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \ \Rightarrow -xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sowie $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \ \Rightarrow xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|y| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Es gelte $(x_n,y_n) \to (0,0)$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0,2\pi)$ mit $(x_n,y_n) = (r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n,y_n) = f(r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n) &= \frac{(r_n\cos\varphi_n)(r_n\sin\varphi_n)^2}{(r_n\cos\varphi_n)^2+(r_n\sin\varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n}{r_n^2} = r_n\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

weil $r_n \to 0$ strebt und die Folge $(\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n)$ beschränkt ist.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2,1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\varphi = 0$ ist $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \to 0 = g(0,0)$ für $r \to 0$. Im Fall $\cos\varphi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi+0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 3

Eine Funktion f lässt sich in $(0,0)$ stetig fortsetzen, wenn der Grenzwert $c := \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert. Die stetige Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f ist dann gegeben durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

a) Diesmal ist $f(x,y)$ nur für $y \neq 0$ definiert. Wir betrachten daher eine Folge (x_k, y_k) in $\mathbb{R}^2$ mit $y_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(x_k, y_k) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Dann ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f(x_k, y_k) = \frac{1 - \cos(x_k y_k)}{y_k} = \begin{cases} x_k \cdot \dfrac{1-\cos(x_k y_k)}{x_k y_k}\,, & x_k \neq 0\,, \\ 0\,, & x_k = 0\,. \end{cases}$$

Wegen $x_k y_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und $(1-\cos t)/t \xrightarrow{t\to 0} 0$ (Man beachte $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - + \cdots$. Alternativ kann man $(\cos t - 1)/t$ als Differenzenquotient von $g(t) := \cos t$ in 0 auffassen. Wegen $g'(t) = -\sin t$ erhält man dann $\lim_{t\to 0}(1-\cos t)/t = -g'(0) = 0$. Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital könnte man diesen Grenzwert natürlich auch berechnen.) erhält man $\frac{1-\cos(x_k y_k)}{x_k y_k} \to 0$ und damit $f(x_k, y_k) \to 0$ für $k \to \infty$, d.h. $f(x,y)$ konvergiert gegen 0 für $(x,y) \to (0,0)$. Die stetige Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f in $(0,0)$ ist deshalb gegeben durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1\,, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich unmittelbar

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2\,.$$

Also lässt sich f stetig in $(0,0)$ fortsetzen mit

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

c) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1\,,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht, so dass sich f nicht stetig in $(0,0)$ fortsetzen lässt.

d) Wegen

$$|x^3+y^3| \leqslant |x|^3 + |y|^3 \leqslant \max\{|x|,|y|\} \cdot |x|^2 + \max\{|x|,|y|\} \cdot |y|^2 = \max\{|x|,|y|\} \cdot (x^2+y^2)$$

erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{\max\{|x|,|y|\} \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \max\{|x|,|y|\} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0,$$

d.h. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, also ist die stetige Fortsetzung von f in $(0,0)$ gegeben durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Alternativ: Es gelte $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ und $(x_k, y_k) \to (0,0)$. Dann gibt es $r_k > 0$ und $\varphi_k \in \mathbb{R}$ mit $(x_k, y_k) = (r_k \cos\varphi_k, r_k \sin\varphi_k)$; dies ist die Darstellung der Folge in Polarkoordinaten. Dabei gilt $r_k^2 = r_k^2(\cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k) = x_k^2 + y_k^2$, also $r_k = \|(x_k, y_k)\| \to 0$. Somit hat man

$$f(x_k, y_k) = \frac{r_k^3 \cos^3\varphi_k + r_k^3 \sin^3\varphi_k}{r_k^2} = r_k\big(\cos^3\varphi_k + \sin^3\varphi_k\big) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

wegen der Beschränktheit von Sinus und Cosinus. Folglich ist $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

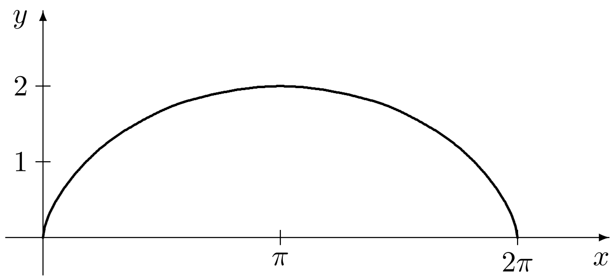
Aufgabe 4

a) Es gilt $\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned} \|\dot\gamma(t)\|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t \\ &= 2\big(1 - \cos(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}t)\big) = 2\big(1 - \cos^2(\tfrac{1}{2}t) + \sin^2(\tfrac{1}{2}t)\big) = 4\sin^2(\tfrac{1}{2}t)\,. \end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist also

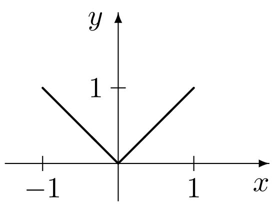
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac{1}{2}t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{1}{2}t)\,dt = -4\cos(\tfrac{1}{2}t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt Zykloide. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

b) Wegen $\gamma(t) = (t, |t|) = \begin{cases} (t, -t) & \text{für } t \in [-1, 0) \\ (t, t) & \text{für } t \in [0, 1] \end{cases}$ ist $\dot\gamma(t) = \begin{cases} (1, -1) & \text{für } t \in (-1, 0) \\ (1, 1) & \text{für } t \in (0, 1) \end{cases}$ und für die Länge der Kurve γ ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{-1}^{0} \|(1,-1)\|\,dt + \int_0^1 \|(1,1)\|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,.$$



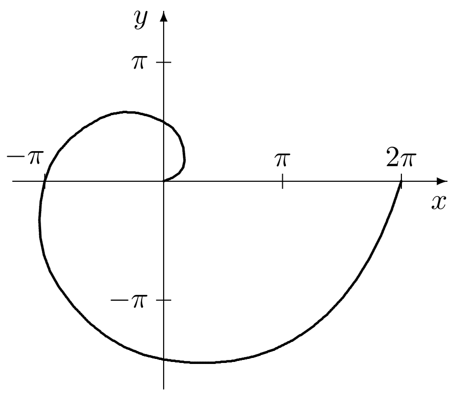
c) Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Wegen $\vec{r}\,'(\varphi) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(\varphi)\|^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2\\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi\\ &= 1+\varphi^2\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}&L(\vec{r}\,) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}+\sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi\\ &= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\operatorname{Arsinh} 2\pi}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,.\end{aligned}$$



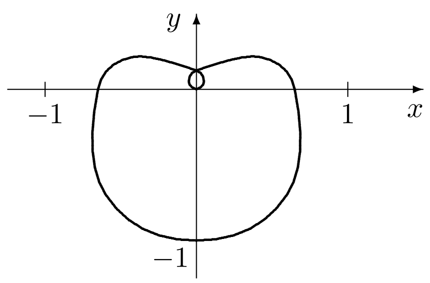
Bemerkung: Diese Kurve heißt Archimedische Spirale.

d) Für $\gamma(t) = (\sin^3(\frac{1}{3}t)\cos t, \sin^3(\frac{1}{3}t)\sin t) =: (x(t), y(t))$ ergibt sich

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{1}{3}t)\tfrac{1}{3}\cos t - \sin^3(\tfrac{1}{3}t)\sin t\\ &= \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\big(\cos(\tfrac{1}{3}t)\cos t - \sin(\tfrac{1}{3}t)\sin(t)\big) = \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{4}{3}t)\,,\end{aligned}$$

und genauso $y'(t) = \sin^2(\frac{1}{3}t)\sin(\frac{4}{3}t)$. Folglich ist die Länge der Kurve γ

$$\begin{aligned}&\int_0^{6\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{6\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^{6\pi}\sqrt{\sin^4(\tfrac{1}{3}t)\cos^2(\tfrac{4}{3}t) + \sin^4(\tfrac{1}{3}t)\sin^2(\tfrac{4}{3}t)}\,dt\\ &= \int_0^{6\pi}\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{6\pi}\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt + \int_0^{6\pi}\cos^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt\right) = \frac{1}{2}\int_0^{6\pi} 1\,dt = \frac{6\pi}{2} = 3\pi\,.\end{aligned}$$



Bemerkung: Die Kurve wird bei der gegebenen Parametrisierung zweimal durchlaufen und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn.

Aufgabe 5

Es handelt sich um den Schnitt der Oberfläche der Kugel um $(0, 0, 0)$ mit Radius 1 und der Ebene $x + z = 1$; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z = 1 - x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1\,, \quad \text{also} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 0\,.$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y)^2 = 0\,.$$

Bei dieser Gleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cos t, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y = \tfrac{1}{2}\sin t \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Dann haben wir $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$. Also:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\gamma(t)$ lautet $\dot\gamma(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s(t) := \int_0^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + 2\cos^2\tau + \sin^2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{2}\,d\tau = t/\sqrt{2} \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

also gilt $L(\gamma) = s(2\pi) = \sqrt{2}\pi$. Wegen $t = t(s) = \sqrt{2}\,s$ ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge (bzw. die natürliche Parametrisierung) gegeben durch

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(\sqrt{2}\,s) \\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,s) \\ 1 - \cos(\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix} \qquad (s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]).$$

Aufgabe 6

a) Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\gamma(t_0) + \lambda\dot\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \arcsin t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\gamma(t_0)$.

b) Für $t \in [-1, 1]$ haben wir

$$s(t) := \int_{-1}^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau = \int_{-1}^t \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau = \sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-1}^t = \sqrt{2}\,(\arcsin t + \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \arcsin t, \qquad \text{also} \qquad t = t(s) = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$$

lautet eine Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder natürliche Parametrisierung)

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 7

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in x^0 in Richtung des ersten Einheitsvektors $e_1 = (1,0)$, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) &:= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x^0+te_1) - f(x^0)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f((x,y)+t(1,0)) - f(x,y)\big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+t,y) - f(x,y)\big).\end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies ist gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x,y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitungen nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x - 4y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) &= -8xy + 12y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= -8xy + 12y^2\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= (3x^2+y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}f(x,y)\,.\end{aligned}$$

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1,v_2) = (1,1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x^0+tv) - f(x^0)\Big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1+yv_2) + t^2(v_1^2+v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1+yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\\ &\qquad + t^2(v_1^2+v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1)$ setzen wir $\alpha := yv_1+xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t+\beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha+2\beta t)e^{\alpha t+\beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(g(t)-g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1+xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2)+2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1+0\\ &= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x)+2(x+y)\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ von f stetig sind, ist f nach dem Satz in 19.10 differenzierbar. Deshalb gilt nach dem Satz in 19.9 für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= f'(x,y)\,v = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\begin{pmatrix}x^2y+2x+y^3 & x^3+xy^2+2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\big(x^2y+2x+y^3+x^3+xy^2+2y\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Dies bestätigt unser obiges Ergebnis.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= yz\sin(x+y+z)+xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xz\sin(x+y+z)+xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xy\sin(x+y+z)+xyz\cos(x+y+z)\,.\end{aligned}$$

d) Hier sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^y/z\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) &= e^y/z = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) &= -e^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)\,.\end{aligned}$$