

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin x) =: (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$.

Da die partiellen Ableitungen von f

$$\begin{aligned} (f_1)_x(x, y, z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, \\ (f_1)_y(x, y, z) &= 2xyz^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, \\ (f_1)_z(x, y, z) &= 3xy^2z^2(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, \\ (f_2)_x(x, y, z) &= 2xe^y + \cos x, \\ (f_2)_y(x, y, z) &= x^2e^y, \\ (f_2)_z(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

auf \mathbb{R}^3 stetig sind, ist f stetig partiell differenzierbar und damit auch differenzierbar. Für die Ableitung von f ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= \begin{pmatrix} (f_1)_x(x, y, z) & (f_1)_y(x, y, z) & (f_1)_z(x, y, z) \\ (f_2)_x(x, y, z) & (f_2)_y(x, y, z) & (f_2)_z(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2z^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (ye^x + x \sinh y, y^4 + 3x^2 \sin y, 4y - x^3)$

Auch hier sind sämtliche partiellen Ableitungen von f stetig, so dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x \cosh y \\ 6x \sin y & 4y^3 + 3x^2 \cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- c) $f: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$

Wiederum ist f stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar. Die Ableitung von f lautet

$$f'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2).$$

Bemerkung: Es gilt $\det f'(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta$ (\rightarrow Kugelkoordinaten).

- d) $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(w, x, y, z) = x^y$

Wegen $x^y = e^{y \ln x}$ gilt $f_x(w, x, y, z) = e^{y \ln x} y/x$ und $f_y(w, x, y, z) = e^{y \ln x} \ln x$. Folglich ist

$$f'(w, x, y, z) = (0 \quad yx^{y-1} \quad x^y \ln x \quad 0), \quad (w, x, y, z) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2

- a) Bei der Funktion f ergibt sich für eine Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ wegen $f(0, 0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}.$$

Ist v so gewählt, dass $v_1 v_2 \geq 0$ gilt, dann hat man $tv_1 \cdot tv_2 \geq 0$ für alle $t \neq 0$ und damit nach Definition von f

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1}{t} = v_1.$$

Ist dagegen $v_1 v_2 < 0$, so erhält man $tv_1 \cdot tv_2 < 0$ für alle $t \neq 0$, also

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 + tv_2}{t} = v_1 + v_2.$$

Für die Funktion f existieren folglich alle Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$.

- b) Wir bestimmen zunächst $f'(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0, y_0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = -1 \quad \text{und} \quad f'(x_0, y_0)v = \frac{\partial f}{\partial v}f(x_0, y_0) = 2.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := f_x(x_0, y_0)$ und $\beta := f_y(x_0, y_0)$, so ist $f'(x_0, y_0) = (\alpha \ \beta)$, also $f'(x_0, y_0)u = \alpha + 2\beta$ und $f'(x_0, y_0)v = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen liefern daher

$$\alpha + 2\beta = -1 \quad \text{und} \quad -\alpha + \beta = 2.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Folglich ist $f'(x_0, y_0) = \left(-\frac{5}{3} \ \frac{1}{3}\right)$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)w = \left(-\frac{5}{3} \ \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung h gegeben durch

$$h = \frac{\text{grad } f(x_0, y_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

- a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x, y) \neq (0, 0)$ und $z := \max\{|x|, |y|\}$, so gilt

$$|f(x, y)| = \left| \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y^3| + |x^2 y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{z^3 + z^3}{z^2} = 2z = 2 \max\{|x|, |y|\},$$

und damit folgt $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0, 0)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

- b) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$f_x(x, y) = \frac{-2xy(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$f_y(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2 y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ haben wir also

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4 + 4x^2 y^2 + y^4 \end{pmatrix}.$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 - 0}{0+h^2} = 1.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } f(0,0) = \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Wegen

$$f_x(x,x) = \frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \neq 0 = f_x(0,0),$$

$$f_y(x,0) = \frac{-x^4 + 0 + 0}{(x^2+0)^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \neq 1 = f_y(0,0)$$

ist weder f_x noch f_y im Punkt $(0,0)$ stetig.

d) Es sei $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 v_2^3 - h^3 v_1^2 v_2}{h^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\text{grad } f(0,0)) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2 (v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen v gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\text{grad } f(0,0)) \cdot v$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste die Gleichung für alle Richtungen gelten. Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar mit

$$f'(x,y) = (\text{grad } f(x,y))^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} (-4xy^3 \quad -x^4 + 4x^2y^2 + y^4).$$

Aufgabe 4

a) Für die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin(|t|^{-1}) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin(|t|^{-1}) = 0,$$

weil $\sin(|t|^{-1})$ beschränkt ist, und aufgrund von $f(x,y) = f(y,x)$ ist $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$.

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $(0,0)$, wenn es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, also $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, gibt mit

$$\frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}|}{\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \|} \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} 0. \quad (*)$$

Wegen $f_x(0,0) = 0$ und $f_y(0,0) = 0$ ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ unser Kandidat für die Ableitung von f in $(0,0)$. In der Tat ist (*) für dieses A erfüllt, denn es gilt $f(0,0) = 0$ und $A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$ sowie

$$\frac{|f(h_1, h_2)|}{\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \|} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \| \sin \frac{1}{\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \|} \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} 0.$$

b) Für die partielle Ableitung von f nach x ergibt sich im Fall $(x, y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \sin(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2) \cos(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (-\frac{1}{2})(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x \\ &= 2x \sin(x^2 + y^2)^{-1/2} - x(x^2 + y^2)^{-1/2} \cos(x^2 + y^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Damit hat man für $x \neq 0$

$$f_x(x, 0) = 2x \sin(|x|^{-1}) - x|x|^{-1} \cos(|x|^{-1}).$$

Ist $x_k := \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, gesetzt, so strebt $x_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, allerdings konvergiert $f_x(x_k, 0) = 2\frac{1}{k\pi} \sin(k\pi) - \cos(k\pi) = -(-1)^k$ für $k \rightarrow \infty$ nicht. Folglich ist f_x in $(0,0)$ nicht stetig. Aus Symmetriegründen ($f(x, y) = f(y, x)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) gilt dies auch für f_y .

Bemerkung: Die Funktion f ist ein Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar ist, jedoch nicht stetig partiell differenzierbar ist. Wenn man also weiß, dass eine Funktion nicht stetig partiell differenzierbar ist, dann kann man keine Aussage über Differenzierbarkeit treffen.

Aufgabe 5

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

gilt $|f(x, y)| \leq |xy|$ und damit folgt $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0,0)$ für $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

b) Für $(x, y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

und wegen $f(x, y) = -f(y, x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(y+h, x) + f(y, x)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h, x) - f(y, x)}{h} = -f_x(y, x) = -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Für $(x, y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Somit ist $\text{grad } f(0,0) = (0,0)$.

c) Es ist

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2 + 0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 + 0 - h^5}{h(0 + h^2)^2} = -1.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\text{grad } f(x,y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = (\text{grad } f(x,y))^T = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 \quad x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4).$$

Weiter ist bekannt: $\text{grad } f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|, |y|\}$. Es gilt

$$|f_x(x,y)| = \frac{|x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6 \max\{|x|, |y|\}.$$

Damit folgt $f_x(x,y) \rightarrow 0 = f_x(0,0)$ für $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass f_y in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0,0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sein, denn sonst müssten f_{yx} und f_{xy} nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach c) nicht der Fall ist.

Aufgabe 6

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar.

Für f mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) &= g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \cos(x^2 y^2) & x^2 \cos(x^2 y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2 \cos(x^2 y^2) & 2x^2 y \cos(x^2 y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Funktion $h \circ g$ erhält man

$$\begin{aligned} (h \circ g)'(x,y) &= h'(g(x,y)) \cdot g'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)} \sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(h \circ g)'(x, y)$ die Matrix

$$= \begin{pmatrix} (y \cos(xy) \cos(e^{x+y}) - e^{x+y} \sin(e^{x+y}))e^{\sin(xy)} & (x \cos(xy) \cos(e^{x+y}) - e^{x+y} \sin(e^{x+y}))e^{\sin(xy)} \\ y \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) & x \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^2, y^2) = (\sin(x^2 y^2), e^{x^2+y^2}) =: (u_1(x, y), u_2(x, y))$$

erhalten wir

$$(g \circ f)'(x, y) = \begin{pmatrix} (u_1)_x & (u_1)_y \\ (u_2)_x & (u_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \cos(x^2 y^2) & 2x^2 y \cos(x^2 y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$h \circ g(x, y) = h(g(x, y)) = h(\sin(xy), e^{x+y}) = (e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}), \sinh(\sin(xy))) =: (v_1(x, y), v_2(x, y))$$

und für die Ableitung ergibt sich

$$(h \circ g)'(x, y) = \begin{pmatrix} (v_1)_x & (v_1)_y \\ (v_2)_x & (v_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y \cos(xy) \cos(e^{x+y}) - e^{x+y} \sin(e^{x+y}))e^{\sin(xy)} & (x \cos(xy) \cos(e^{x+y}) - e^{x+y} \sin(e^{x+y}))e^{\sin(xy)} \\ y \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) & x \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

- a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion g muss stetig differenzierbar sein, es muss $g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ gelten, und die Matrix $g'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ muss regulär sein. Überprüfen wir diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2) \cos \frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2) \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$g'(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$(g^{-1})'(0, \frac{3}{4}) = (g'(g^{-1}(0, \frac{3}{4})))^{-1} = (g'(\ln 2, \frac{\pi}{2}))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Die Funktion g ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det g'(x, y) = (\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2.$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x \cos y = 0$ und $\cosh x \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $g'(x, y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit.

Die Funktion g ist aber nicht injektiv wegen $g(x, y + 2\pi) = g(x, y)$.

Aufgabe 8

- a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0, 0, -2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, -2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0, 0, -2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + 4z - 3xy, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, -2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x, y, g(x, y)) \\ &= -\frac{1}{3g(x, y)^2 + 4g(x, y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x, y) + 3x^2 & -3xg(x, y) - 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0, 0, 1, 1)$ durch die Gleichung

$$f(x, y, u, v) = \vec{0}, \quad \text{mit} \quad f(x, y, u, v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0, 0, 1, 1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial(u, v)}(0, 0, 1, 1)$ regulär ist. Wegen

$$f'(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \frac{\partial f}{\partial(u, v)}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial(u, v)}(0, 0, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$.

Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x , wobei wir $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \quad \text{und} \quad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0, 0) + 2v_x(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad -6u_x(0, 0) + 8v_x(0, 0) = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0, 0) = v_x(0, 0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad \text{und} \quad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0, 0) + 2v_y(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad -6u_y(0, 0) + 8v_y(0, 0) = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0, 0) = v_y(0, 0) = 0$.