UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das zweite Taylorpolynom von f in $x^0 = (1, -1, 0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + \tfrac{1}{2} h^T H_f(x^0) h\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x, y, z) = e^z\,, \qquad f_y(x, y, z) = -2y\,, \qquad f_z(x, y, z) = xe^z\,.$$

Damit erhalten wir $f_x(1, -1, 0) = 1$, $f_y(1, -1, 0) = 2$ und $f_z(1, -1, 0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{xz} = e^z\,, \quad f_{yy} = -2\,, \quad f_{yz} = 0\,, \quad f_{zz} = xe^z\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0\,, \qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1, h_2, h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1 h_3\big) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2} h_3^2 + h_1 h_3\,.$$

Schreibt man $h = (x, y, z) - x^0 = (x - 1, y + 1, z)$, so erhält man

$$(x - 1) + 2(y + 1) + z - (y + 1)^2 + \tfrac{1}{2} z^2 + (x - 1) z\,.$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \cos(x)\, \sin(y)\, e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lllll}
f(x,y) & = e^{x-y} \cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) = & 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) = & 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) = & 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) = & 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) = & 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) = & -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \cos x \sin y - 2 \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) = & 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) = & 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2 \sin x \cos y - 2 \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) = & -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2 \cos x \sin y + 2 \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) = & 2
\end{array}$$

Damit ist für $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned}
T_{3,(0,0)}(h) &= f(0,0) + \tfrac{1}{1!}\,(h \cdot \nabla) f(0,0) + \tfrac{1}{2!}\,(h \cdot \nabla)^2 f(0,0) + \tfrac{1}{3!}\,(h \cdot \nabla)^3 f(0,0) \\
&= f(0,0) + \sum_{j=1}^{2} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(0,0) + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^{2} h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l}(0,0) \\
&= 0 + h_2 + \tfrac{1}{2}\big(h_1 h_2 + h_2 h_1 + h_2^2(-2)\big) + \tfrac{1}{6}\big(h_1 h_2 h_2(-2) + h_2 h_1 h_2(-2) + h_2 h_2 h_1(-2) + h_2^3 2\big) \\
&= h_2 + h_1 h_2 - h_2^2 - h_1 h_2^2 + \tfrac{1}{3}\, h_2^3.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $(x, y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x, y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{1}{3}\, y^3.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (y+1, x-2) \overset{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$f_x(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + (2x+2y+3)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} .$$

Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ergibt sich daraus $f_y(x,y) = f_x(y,x) = (-4y^2 - 4xy - 6y + 2)e^{-x^2-y^2}$. Kritische Punkte von f sind solche mit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, also mit

$$-4x^2 - 4xy - 6x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4y^2 - 4xy - 6y + 2 = 0 . \tag{$*$}$$

Wir ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$4(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0 , \qquad \text{also} \qquad (x-y)\big(4(x+y) + 6\big) = 0 .$$

Dies ist gleichbedeutend mit $x - y = 0$ oder $4(x+y) + 6 = 0$. Im ersten Fall, also für $x = y$, folgt aus $(*)$ die Gleichung

$$-8x^2 - 6x + 2 = 0 , \qquad \text{also} \qquad x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4} = 0 .$$

Diese hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm (\frac{9}{64} + \frac{1}{4})^{1/2}$, d. h. $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.

Im zweiten Fall (für $y = -x - \frac{3}{2}$) wird die erste Gleichung in $(*)$ zu

$$-4x^2 - 4x(-x - \tfrac{3}{2}) - 6x + 2 = 0 , \qquad \text{also} \qquad 2 = 0 .$$

Es gibt folglich genau zwei kritische Punkte: $(-1,-1)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Nur dort können lokale Extrema von f sein, doch ob tatsächlich Extrema vorliegen, müssen wir noch untersuchen. Dazu betrachten wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (-8x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (8x^3 + 8x^2y + 12x^2 - 12x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} , \\ f_{yy}(x,y) &= (8y^3 + 8xy^2 + 12y^2 - 4x - 12y - 6)e^{-x^2-y^2} , \\ f_{xy}(x,y) &= -4xe^{-x^2-y^2} - 2y(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (8x^2y + 8xy^2 + 12xy - 4x - 4y)e^{-x^2-y^2} . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{xy}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 6e^{-2} \end{pmatrix} .$$

Wegen $f_{xx}(-1,-1) = 6e^{-2} > 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 20e^{-4} > 0$ ist diese Matrix positiv definit. Somit besitzt f im Punkt $(-1,-1)$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$H_f(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -9e^{-1/8} & -e^{-1/8} \\ -e^{-1/8} & -9e^{-1/8} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -9e^{-1/8} < 0$ und $\det H_f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 80e^{-1/4} > 0$ ist diese Matrix negativ definit. Im Punkt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ hat f daher ein lokales Maximum.

Aufgabe 3

Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f nach dem Satz in 19.18 auf Q Maximum und Minimum an.
Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5) \times (0,5)$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5) \times (0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:
$x = 0$: $f(0,y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.
$x = 5$: $f(5,y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.
$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leqslant 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot, 0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.
$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3}, 5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.
Insgesamt erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \qquad \text{und} \qquad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 4

Die Funktion f ist auf der Menge B stetig. Da B abgeschlossen und beschränkt ist, besitzt f auf B sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.
Wir betrachten zuerst alle Punkte im Inneren von B, in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in (0,1)$. Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2-1)x \\ (z^2-1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2 + z^3 - z \end{pmatrix}.$$

Wegen $z^2 < 1$ sind die ersten beiden Zeilen genau für $x = y = 0$ erfüllt. Mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit $2z\|\vec{v}\| + z^3 - z = z(3z^2 - 1)$. Also gilt die dritte Zeile genau für $z = 1/\sqrt{3}$ oder $z = -1/\sqrt{3}$ (Beachte: $x = y = z = 0$ wird in diesem Fall nicht berücksichtigt). Daher müssen wir im Inneren die Punkte $(0,0,1/\sqrt{3})$ und $(0,0,-1/\sqrt{3})$ untersuchen sowie den Nullpunkt, den wir zuvor ausgeschlossen haben:

$$f(0,0,0) = 0, \qquad f(0,0,-1/\sqrt{3}) = f(0,0,1/\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand ∂B von B zu untersuchen. Dort gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und damit $f(x,y,z) = (z^2 - 1) =: g(z)$ für $z \in [-1,1]$. Wir sehen sofort, dass die Funktion g für $z = -1$ oder $z = 1$ ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Es folgt: -1 ist das Minimum von f auf B und 0 das Maximum.

Ohne die Vereinfachung könnten wir auch folgendermaßen vorgehen:
Ist $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$, definiert, so gilt $\partial B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = 0\}$. Wir berechnen die Extrema von f auf ∂B unter Verwendung der Multiplikatorenregel von Lagrange: h ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, f hingegen nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, allerdings erfüllt $\vec{0}$ die Nebenbedingung $h(\vec{0}) = 0$ nicht. Weiter gilt $h'(x,y,z) = (2x \;\; 2y \;\; 2z)$, damit ist $\operatorname{rg} h'(x,y,z) = 1$ für alle $(x,y,z) \in \partial B$. Setzen wir $L(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda h(x,y,z)$, so gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange für jeden Punkt $\vec{v}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, in dem f ein Extremum auf ∂B hat, ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla L(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda_0 h_x \\ f_y + \lambda_0 h_y \\ f_z + \lambda_0 h_z \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0^2-1)x_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 x_0 \\ (z_0^2-1)y_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 y_0 \\ 2z_0\|\vec{v}_0\| + (z_0^3 - z_0)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 z_0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem in x_0, y_0, z_0, λ_0 muss man nun lösen. Die globalen Extrema erhält man durch Vergleich der Funktionswerte an den Punkten (x_0,y_0,z_0), die das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 5

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2+y^2-2x+2y+1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg}\, h'(x,y) = \operatorname{rg}\big(2(x-1) \quad 2(y+1)\big) \overset{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im kritischen Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \qquad \text{und} \qquad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \iff y = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 6

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

gilt $\operatorname{rg} h'(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch nicht die Nebenbedingungen $h_1(x,y,z) = 0$ und $h_2(x,y,z) = 0$ erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ und damit wäre $x^2+y^2+z^2 = 1$ nicht erfüllt. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 7

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x,y,z) := \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{v}\,) = f(\nabla \times \vec{v}\,) + (\nabla f) \times \vec{v}$. Offenbar ist $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8 - 2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f) \times \vec{v} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{v}\,) = f(\nabla \cdot \vec{v}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8 - 2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Für $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(g(r,\varphi)) = u \circ g(r,\varphi)$$

mit $g\colon (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r,\varphi) = u'(g(r,\varphi)) \cdot g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r,\varphi)) & u_y(g(r,\varphi)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r,\varphi) =: (v_r(r,\varphi) \;\; v_\varphi(r,\varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} v_r(r,\varphi) &= \cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ v_\varphi(r,\varphi) &= -r\sin\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &\quad + \sin\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &= \cos^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad - r\sin\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\ &\quad - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r\cos\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\ &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\, v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \\ &\quad = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) \\ &\quad = u_{xx}(x,y) + u_{xx}(x,y) = \Delta u(x,y) \end{aligned}$$

mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Aufgabe 9

Für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definiere $r(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist $f = F \circ r$ und für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial (F \circ r)}{\partial x_k}(\vec{x}) = F'\big(r(\vec{x})\big)\,\frac{\partial r}{\partial x_k}(\vec{x}) = F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(\vec{x}) &= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|} + F'\big(\|\vec{x}\|\big) x_k \cdot (-1)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^3}\right) F'\big(\|\vec{x}\|\big).
\end{aligned}
$$

Dies führt auf die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\Delta f(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(\vec{x}) \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{n}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^3}\right) F'\big(\|\vec{x}\|\big) \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big).
\end{aligned}
$$