UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit $\dot\gamma(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \Big[\tfrac13(2+t^2)^{3/2}\Big]_0^{2\pi} = \tfrac13\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)\\ &= \tfrac23\sqrt2\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.\end{aligned}$$

b) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{2\pi}\vec v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} e^{\cos t}\\ \cos t\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\,dt = \Big[e^{\cos t} - \tfrac13\cos^3 t\Big]_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

ii) Auch hier benutzen wir die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{\ln 2}\vec v(\gamma(t))\cdot\gamma(t)\,dt = \int_0^{\ln 2}\begin{pmatrix}\cosh t\\ -\sinh t\\ \sinh t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{\ln 2}(\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2}(1+\sinh t\cosh t)\,dt\\ &= \ln 2 + \Big[\tfrac12\sinh^2 t\Big]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac12\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac12\big(\tfrac12(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.\end{aligned}$$

iii) Die Kurven $\gamma_1\colon [0,1]\to\mathbb R^2$, $\gamma_1(t) = (t,0)$, und $\gamma_2\colon[1,2]\to\mathbb R^2$, $\gamma_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär und es gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung 20.1 (d) vor:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_{\gamma_1}\vec v\cdot d\vec s + \int_{\gamma_2}\vec v\cdot d\vec s = \int_0^1 \vec v(\gamma_1(t))\cdot\dot\gamma_1(t)\,dt + \int_1^2\vec v(\gamma_2(t))\cdot\dot\gamma_2(t)\,dt\\ &= \int_0^1\begin{pmatrix}\sin t\\ t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt + \int_1^2\begin{pmatrix}\sin 1\\ 1+(t-1)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^1\sin t\,dt + \int_1^2\big(1+(t-1)^2\big)\,dt\\ &= \big[-\cos t\big]_0^1 + \Big[t + \tfrac13(t-1)^3\Big]_1^2 = (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac13 - 1) = \tfrac73 - \cos 1\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $\vec{f} =: (f_1, f_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und die Verträglichkeitsbedingung

$$\partial_x f_2(x,y) = \partial_x(x^2+y^2) = 2x = \partial_y(2xy) = \partial_y f_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt $\vec{f}$ ein Potentialfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$. Wegen $\partial_x\varphi(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y\varphi(x,y) = f_2(x,y)$ und $\partial_y\varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac{1}{3}\,y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}\,y^3$$

ein Potential von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$. Die Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

$$A = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}\,,$$

welches nach Beispiel (2) in 20.2 nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ abhängt:

$$A = \varphi(-1,2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}\,.$$

Aufgabe 2

a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist. (Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet.) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad \partial_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq \partial_y v_3(x,y,z)$$

ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d. h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2\,, \qquad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3\,, \qquad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2\\ 2t\\ t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 3

Die Menge $G := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0 \}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf G stetig!) Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b \\ -3-c \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a=1$, $b=1$ und $c=-3$ gilt.
In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-3z \\ x+2y+z \\ -3x+y+4z \end{pmatrix}$$

ein Potential $g\colon G \to \mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x g(x,y,z) = x+y-3z$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = x + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= x+2y+z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 2y+z$, also $c(y,z) = y^2+yz+d(z)$ mit einer gewissen Funktion d. Somit:

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z).$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = -3x+y+d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2.$$

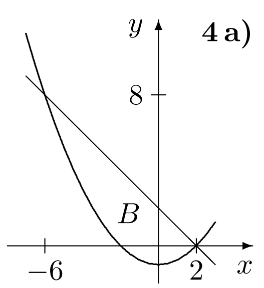
Aufgabe 4

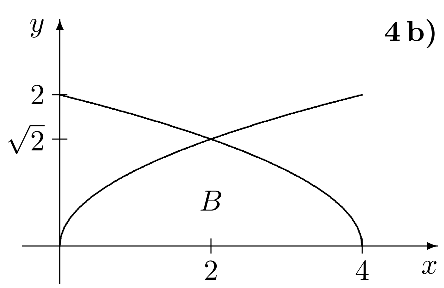
a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2-x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2-x$, also $x^2+4x-12=0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint_B d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^{2} \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\,dx = \int_{-6}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\,dx$$
$$= \big[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\big]_{-6}^{2} = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18-18-18) = \tfrac{64}{3}.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4-y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4-y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y>0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\,dy = \big[4y - \tfrac{2}{3}y^3\big]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}.$$





Aufgabe 5

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 in 20.5 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac12 xy^2+\tfrac13 y^3\right]_{y=0}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\tfrac12 x+\tfrac13\right) dx = \left[\tfrac14 x^2+\tfrac13 x\right]_0^1 = \tfrac14+\tfrac13 = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0\int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx$$
$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2)-\sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac12\cosh(2x+2)-\tfrac12\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$
$$= \left(\tfrac12\cosh 2-\tfrac12\cosh 0\right)-\left(\tfrac12\cosh 0-\tfrac12\cosh(-2)\right) = \cosh 2 - 1\,.$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac12(e^2+e^{-2})-1$.

Aufgabe 6

Da der Integrand jeweils eine stetige Funktion ist, kann man die Integrationsreihenfolge nach Satz 2 in 20.5 vertauschen.

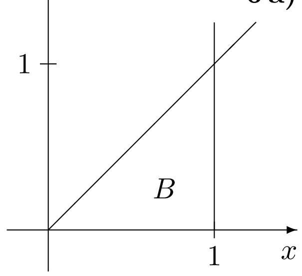
a) Es gilt

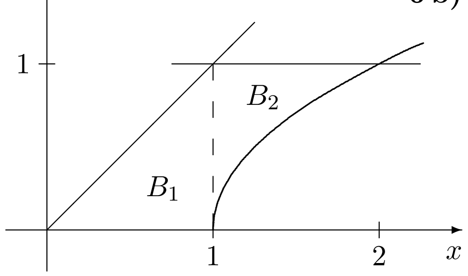
$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x dy\, e^{x^2}\,dx = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\tfrac12 e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

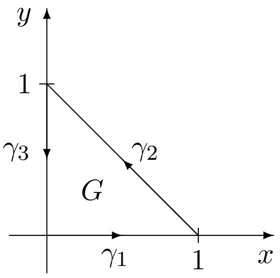
$$\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,dx\,dy = \iint_{B_1} x^2y\,d(x,y) + \iint_{B_2} x^2y\,d(x,y)$$
$$= \int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx + \int_1^2\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[\tfrac12 x^2y^2\right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[\tfrac12 x^2y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \tfrac12 x^4\,dx + \int_1^2 \left(\tfrac12 x^2-\tfrac12 x^2(x-1)\right) dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^1 + \left[-\tfrac18 x^4+\tfrac13 x^3\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{10} + \left(-2+\tfrac83+\tfrac18-\tfrac13\right) = \tfrac{67}{120}\,.$$





Aufgabe 7

Zunächst berechnen wir $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (t,0)\,,\\
\gamma_2 &: [1,2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (2-t,t-1)\,,\\
\gamma_3 &: [2,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0,3-t)\,.
\end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0,1) = \gamma_3(2)$. Der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist gegeben durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (im Sinne von Bemerkung 20.1 (d)). Deshalb ist

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2 + (2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1) - (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3 - 6t^2 + 10t - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt\\
&= \int_1^2 \big(t^3 - 6t^2 + 11t - 7\big)\,dt = \Big[\frac{1}{4}\,t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2}\,t^2 - 7t\Big]_1^2 = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2\,dt = \Big[-\frac{1}{3}\,(3-t)^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2 y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6 erfüllt sind. Dieser liefert

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) = \iint\limits_G (2xy - x)\,d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x)\,dy\,dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\,dx\\
&= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint\limits_G (x^2+y)\,d(x,y) = \iint\limits_G (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y))\,d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G (x^2+y)\,d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\,\sin t \\ \cos t\,\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t\,\sin^2 t + \sin t\cos^2 t\right) dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}\sin^2(2t) + \sin t\cos^2 t\right) dt \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,dt - \left[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du + \tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du\right) \\
&\overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du + \tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \cos^2(u)\,du\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} 1\,du\right) = \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\sin t\,\cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{4\pi}\sin^2 t\,dt = \int_0^{4\pi}\cos^2 t\,dt$.