UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
10.06.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\,ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) := 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$.

i) $\vec{v}(x,y) = (e^x, xy)\,, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

ii) $\vec{v}(x,y,z) = (y, -z, x)\,, \qquad \gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln 2$

iii) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2+y^2)\,, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t, 0)\,, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (1, t-1)\,, & 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$

c) Ein Massenpunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2+y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug γ. Welche Arbeit $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ wird hierbei geleistet?

Aufgabe 2

Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s}\,,$$

wobei die Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Aufgabe 3

Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$\vec{v}\colon \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x,y,z > 0 \right\} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die Mengen $B \subset \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt $\iint_B d(x,y)$.

a) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x \right\}$

b) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0,\; y^2 < x < 4 - y^2 \right\}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y)$ **b)** $\displaystyle\iint_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x + y)\, d(x,y)$

Aufgabe 6

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge, und berechnen Sie den Wert der Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx\, dy$

Aufgabe 7

Es sei γ eine Kurve im Sinne von Bemerkung 20.1(d), deren Träger der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist. $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 8

Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes:

$$\iint_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Übungsklausur Die Übungsklausur zur HM II findet am **Samstag, den 20.06.2009, von 9:00 bis 11:00 Uhr** statt. Wer daran teilnehmen möchte, muss sich im Zeitraum vom 08.06.2009 bis 15.06.2009 in die Listen eintragen, die am Schwarzen Brett neben Raum 3A-17 (Allianzgebäude) aushängen.

ACHTUNG: Es gibt eine spezielle Liste für Studierende der Diplom- oder Lehramtsstudiengänge Physik oder Chemie, die einen Übungsschein benötigen.

Bitte beachten Sie die Hinweise zur Übungsklausur auf der Vorlesungshomepage.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 6, 7 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.