UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir setzen in die Ungleichung, die G definiert, Polarkoordinaten ein, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r \geqslant 0$ und $0 \leqslant \varphi < 2\pi$:

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 < 3r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\,.$$

Wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ bedeutet das $r^4 < r^2(3+\sin^2\varphi)$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $r \neq 0$ und $r^2 < 3+\sin^2\varphi$. Der Rand von G besteht folglich aus dem Punkt $(0,0)$ und der durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\,, \qquad \text{wobei } \; r(t) := \sqrt{3+\sin^2 t}\,,$$

gegebenen Kurve.

b) Die Leibnizsche Sektorformel liefert für den Flächeninhalt von G

$$A(G) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3+\sin^2 t)\,dt = \tfrac{1}{2}(6\pi+\pi) = \tfrac{7}{2}\pi\,.$$

Aufgabe 2

Die Fläche $\mathcal{F} = \big\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x,y) = x^2+y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2+y^2 \leqslant 1\}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{F}) &= \iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_{B} \|\partial_x\vec{g}(x,y) \times \partial_y\vec{g}(x,y)\|\,d(x,y) = \iint\limits_{B} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \right\| d(x,y) \\
&= \iint\limits_{B} \left\| \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| d(x,y) = \iint\limits_{B} \sqrt{(\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2 + 1}\,d(x,y) \\
&= \iint\limits_{B} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,d(x,y).
\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A(\mathcal{F}) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4r^2+1}\,r\,d(r,\varphi) = 2\pi\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr = 2\pi\big[\tfrac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\big]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2}-1).$$

Aufgabe 3

Wir bestimmen zunächst, welcher Teil $\mathcal{F}_Z$ von $\mathcal{F}$ innerhalb von Z liegt:

$$\vec{g}(u,v) \in Z \iff (u+v)^2 + (u-v)^2 \leqslant 4 \iff 2u^2 + 2v^2 \leqslant 4\,.$$

Die Fläche $\mathcal{F}_Z$ ist also durch $\vec{g}(u,v)$ mit $(u,v) \in U := \{\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leqslant 2\,\}$ gegeben. Definitionsgemäß ist dann

$$A(\mathcal{F}_Z) = \iint\limits_{\mathcal{F}_Z} do = \iint\limits_{U} \|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|\; d(u,v)\,.$$

Hier haben wir

$$\partial_u \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+2v \\ 2v-2u \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$A(\mathcal{F}_Z) = \iint\limits_{U} \sqrt{(2u+2v)^2 + (2v-2u)^2 + 4}\; d(u,v) = \iint\limits_{U} \sqrt{8(u^2+v^2)+4}\; d(u,v)\,.$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über: $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, $d(u,v) = r\,d(r,\varphi)$, mit $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$ und $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{F}_Z) &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) + 1} \cdot r\, d\varphi\, dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2+1}\, dr \\ &= \tfrac{2}{3}\pi \big[(2r^2+1)^{3/2}\big]_{r=0}^{\sqrt{2}} = \tfrac{2}{3}\pi\big(5^{3/2} - 1\big) = \tfrac{2}{3}\pi\big(5\sqrt{5} - 1\big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Wie wir aus der Vorlesung wissen, gilt für jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{w}$ die Gleichung

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{w}) = 0\,.$$

Daraus können wir folgern: Ist $\vec{v} = \nabla \times \vec{w}$, so muss $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (also $\operatorname{div} \vec{v} = 0$) gelten.

b) Für die gegebene Funktion $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$ gilt

$$\operatorname{div} \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3 = 0 + 0 + 0 = 0\,,$$

die Bedingung aus **a)** ist also erfüllt.

Gemäß Hinweis suchen wir jetzt ein Vektorpotential der Form $\vec{w} = (w_1, w_2, 0)$. Es ist

$$\nabla \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z w_2 \\ \partial_z w_1 \\ \partial_x w_2 - \partial_y w_1 \end{pmatrix}.$$

Damit $\nabla \times \vec{w} = \vec{v}$ erfüllt ist, muss insbesondere $-\partial_z w_2 = v_1 = y - z$ gelten. Somit ist

$$w_2(x,y,z) = -yz + \tfrac{1}{2}z^2 + c(x,y)$$

mit einer gewissen Funktion $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ferner soll $\partial_z w_1 = v_2 = z - x$ gelten; folglich ist

$$w_1(x,y,z) = \tfrac{1}{2}z^2 - xz + d(x,y)$$

mit einer gewissen Funktion $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$\partial_x w_2(x,y,z) - \partial_y w_1(x,y,z) = \partial_x c(x,y) - \partial_y d(x,y)\,.$$

Die Funktionen c und d müssen nun so gewählt werden, dass $\partial_x c(x,y) - \partial_y d(x,y) = v_3 = x - y$ gilt. Für $\partial_x c(x,y) = x$ und $\partial_y d(x,y) = y$ ist dies der Fall; beispielsweise können wir $c(x,y) = \frac{1}{2}x^2$ und $d(x,y) = \frac{1}{2}y^2$ wählen. Ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist dann

$$\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^2 - xz + \frac{1}{2}y^2 \\ -yz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 3 \,\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = \iint_{U} (\nabla \times \vec{v})\big(\vec{g}(u,v)\big) \cdot \big(\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\big)\, d(u,v).$$

Nun ist

$$\partial_u \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint_{U} (8u - 6v + 14)\, d(u,v);$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r\cos\varphi - 6r\sin\varphi + 14)\, r\, d\varphi\, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\, dr \\ &= 28\pi \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Seien $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+2)^2 \leqslant 3,\ z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2,\ x \geqslant 0\right\}$ und

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + z^2 \\ x - 2z \\ -2xz + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{F}$ bezeichne die Oberfläche von B und $\vec{N}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}$.

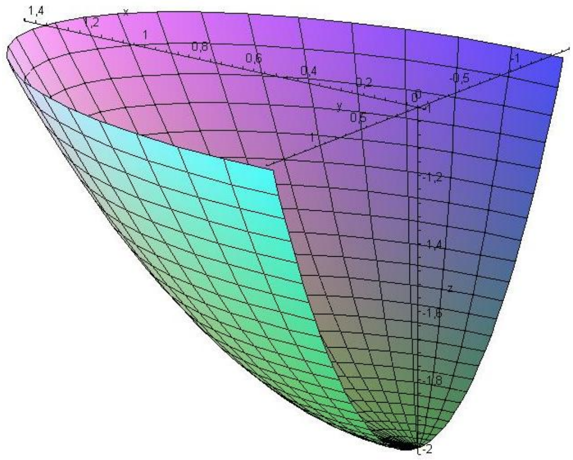
Ist die Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ an den Normaleneinheitsvektor $\vec{N}$ angepasst, so gilt nach dem Integralsatz von Stokes

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N}\, do = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Eine Parametrisierung von $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}\colon V \to \mathbb{R}^3\,,\ \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}r^2 - 2 \end{pmatrix}$$

mit $V := [0, \sqrt{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Hierbei erhält man die Bedingung $r \in [0, \sqrt{2}]$ aus der Ungleichung $x^2 + y^2 + (z+2)^2 \leqslant 3$ und die Forderung $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aus $x \geqslant 0$.)



Der Rand $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ besteht aus zwei Kurvenstücken: einem Halbkreis in der Ebene $z = -1$ mit Radius $\sqrt{2}$ und einem Parabelstück der Parabel $z = \frac{1}{2}y^2 - 2$ in der Ebene $x = 0$. Eine Parametrisierung des Halbkreises ist

$$\gamma_1\colon [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

(nehme $r = \sqrt{2}$) und eine Parametrisierung des Parabelstücks lautet

$$\gamma_2\colon [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_2(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ \frac{1}{2}r^2 - 2 \end{pmatrix}$$

(nehme $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Die Orientierung von γ_1 entspricht allerdings noch nicht der Rechtsschraubenregel. $\partial\mathcal{F}$ wird durch $-\gamma_1$ und γ_2 korrekt parametrisiert (vgl. Skizze). Daher ist

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{-\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\gamma_1(\varphi)) \cdot \dot{\gamma}_1(\varphi)\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2\cos^2\varphi + \sqrt{2}\sin\varphi + 1 \\ \sqrt{2}\cos\varphi + 2 \\ 2\sqrt{2}\cos\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi - 2\sin^2\varphi - \sqrt{2}\sin\varphi + 2\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi \big)\, d\varphi \\
&\overset{(*)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi + 2\cos(2\varphi) - \sqrt{2}\sin\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi \big)\, d\varphi \\
&= \Big[\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\varphi + \sin(2\varphi) + \sqrt{2}\cos\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(in $(*)$ verwendeten wir das Additionstheorem des Cosinus: $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$) sowie

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{v}(\gamma_2(r))\cdot\dot{\gamma}_2(r)\,dr = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} r+(\frac{1}{2}r^2-2)^2 \\ -r^2+4 \\ 2r+r^2-4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\r\end{pmatrix} dr \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(-r^2+4+2r^2+r^3-4r\big)\,dr \\ &= \Big[\tfrac{1}{4}r^4+\tfrac{1}{3}r^3-2r^2+4r\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{2}+8\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{N}\,do = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_1}\vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2}\vec{v}\cdot d\vec{s} = -4\sqrt{2}+\tfrac{4}{3}\sqrt{2}+8\sqrt{2} = \tfrac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 7

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v)\in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\cos^2 v+u\sin^2 v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1}\vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big)\,(-1) = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v)\in U := [0,2\pi]\times[0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}\cos^3 u\\ \cos^2 u\,\sin u\\ v\cos^2 u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix} = \cos^4 u+\cos^2 u\,\sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint_{\mathcal{F}_2}\vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint_U \cos^2 u\,\underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|}_{=\cos^2 u+\sin^2 u=1}\,d(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2 u\,dv\,du = \int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 1)$ mit $(u,v)\in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ liefert $\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big) = u^2\cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_{U} u^2 \cos^2 v \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=|u|=u,\text{ da } u \geqslant 0} d(u,v) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v \, dv\, du$$

$$= \left(\int_0^1 u^3\, du\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} (\nabla \cdot \vec{v}\,)\, d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} 5x^2\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\, r\, d(r,\varphi,z)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2\varphi\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2 \varphi\, d\varphi\, dr$$

$$= 5\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

Aufgabe 8

Zur Berechnung von

$$\iiint\limits_{V} \nabla \cdot \vec{v}\, d(x,y,z)$$

verwenden wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\, \cos\vartheta,\;\; y = r\sin\varphi\, \cos\vartheta,\;\; z = r\sin\vartheta \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,\, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\, 0 \leqslant \vartheta \leqslant \tfrac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$\iiint\limits_{V} \nabla \cdot \vec{v}\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{V} (2 + 3z^2)\, d(x,y,z) = 2 \underbrace{\iiint\limits_{V} d(x,y,z)}_{=\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3,\text{ da } V \text{ Halbkugel}} + 3 \iiint\limits_{V} z^2\, d(x,y,z)$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\vartheta\, r^2 \cos\vartheta\, d\varphi\, dr\, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4 \sin^2\vartheta\, \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 6\pi \left(\int_0^1 r^4\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\, \cos\vartheta\, d\vartheta\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{6}{5}\pi \left[\tfrac{1}{3}\sin^3\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi + \frac{6}{5}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{26}{15}\,\pi.$$

Die Oberfläche ∂V von V setzt sich zusammen aus $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$, wobei $\mathcal{F}_1$ die Kugelschalenhälfte und $\mathcal{F}_2$ die Grundkreisscheibe sind. Als Parametrisierungen nehmen wir

$$\mathcal{F}_1 = \{\vec{g}_1(\varphi,\vartheta) : \varphi \in [0,2\pi],\, \vartheta \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\} \qquad \text{mit } \vec{g}_1(\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\vartheta \\ \sin\varphi\,\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

(Kugelkoordinaten der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius $r=1$) und

$$\mathcal{F}_2 = \{\vec{g}_2(r,\varphi) : r \in [0,1],\, \varphi \in [0,2\pi]\} \qquad \text{mit } \vec{g}_2(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Polarkoordinaten der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 1 in der xy-Ebene $z=0$). Setze

$$\vec{n}_1(\varphi,\vartheta) := \partial_\varphi \vec{g}_1(\varphi,\vartheta) \times \partial_\vartheta \vec{g}_1(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\,\cos\vartheta \\ \cos\varphi\,\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi\,\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\,\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos^2\vartheta \\ \sin\varphi\,\cos^2\vartheta \\ \cos\vartheta\,\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Da die dritte Komponente von $\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)$ nichtnegativ ist, zeigt $\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)$ nach außen. (Achtung: $\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)$ ist nicht normiert!) Für den Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}_2$ nach außen ergibt sich

$$\vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}\, do &= \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \vec{v}(\vec{g}_1(\varphi,\vartheta)) \cdot \frac{\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)}{\|\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)\|}\, \|\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)\|\, d(\varphi,\vartheta) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,(\cos\varphi+\sin\varphi) \\ \cos\vartheta\,(\sin\varphi-\cos\varphi) \\ \sin^3\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos^2\vartheta \\ \sin\varphi\,\cos^2\vartheta \\ \cos\vartheta\,\sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^3\vartheta\,\cos\varphi\,(\cos\varphi+\sin\varphi) + \cos^3\vartheta\,\sin\varphi\,(\sin\varphi-\cos\varphi) + \sin^4\vartheta\,\cos\vartheta\big)\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^3\vartheta + \sin^4\vartheta\,\cos\vartheta\big)\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos\vartheta\,(1-\sin^2\vartheta) + \sin^4\vartheta\,\cos\vartheta\big)\, d\vartheta \\
&= \big[\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}\sin^3\vartheta + \tfrac{1}{5}\sin^5\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) = \tfrac{26}{15}\,\pi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v}\cdot\vec{N}_2\, do &= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \vec{v}(\vec{g}_2(r,\varphi)) \cdot \vec{N}_2(\vec{g}_2(r,\varphi))\, \|\partial_r\vec{g}_2(r,\varphi) \times \partial_\varphi\vec{g}_2(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\
&= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \begin{pmatrix} r(\cos\varphi+\sin\varphi) \\ r(\sin\varphi-\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \|\partial_r\vec{g}_2(r,\varphi) \times \partial_\varphi\vec{g}_2(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\
&= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} 0\, \|\partial_r\vec{g}_2(r,\varphi) \times \partial_\varphi\vec{g}_2(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) = 0
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{N}\, do = \iint\limits_{\mathcal{F}_1} \vec{v}\cdot\frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}\, do + \iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v}\cdot\vec{N}_2\, do = \frac{26}{15}\,\pi.$$

Fazit: Es ist

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{N}\, do = \frac{26}{15}\,\pi = \iiint\limits_{V} \nabla\cdot\vec{v}\, d(x,y,z).$$