UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2008
08.05.2008

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Donnerstag, den 15.05.2008, 11.30 Uhr, neben Raum 305

Aufgabe 13

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad α, das heißt:

$$\forall\, t > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \;:\; f(tx) = t^\alpha f(x).$$

(1) Die Funktion f sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$ gilt

a) $f'(x) \cdot x = \alpha\, f(x)$, **b)** $\operatorname{grad} f(tx) = t^{\alpha-1} \operatorname{grad} f(x)$.

(2) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0. Zeigen Sie, daß die Funktion f linear ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f (bezüglich der Standardbasis).

Aufgabe 14 (K)

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2y^2 \log(x^2+y^2), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt und untersuchen Sie deren Stetigkeit. Ist f im Ursprung differenzierbar?

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & \text{falls } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Ursprung. Ist f dort differenzierbar?

Aufgabe 15 (K)

a) Es sei $D := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\,,\ 1 < y < 2 \}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Abschätzung

$$\left| x_1^{y_1} - x_2^{y_2} \right| \leqslant K \left\| (x_1,y_1) - (x_2,y_2) \right\|$$

für alle $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$ und die Konstante $K := 4\sqrt{1 + (\log 2)^2}\,.$

b) Es sei $g(t) := (\cos t, \sin t)$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall zu $a := 0$ und $b := 2\pi$ kein $\xi \in [a,b]$ mit $g(b) - g(a) = g'(\xi)\cdot(b-a)$ existiert.

Aufgabe 16

Die zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werden definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1\,, & 0 < y < x^2\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} x\,, & xy \geqslant 0\,, \\ x+y\,, & xy < 0\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie für f und g alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, soweit sie existieren.

Prüfungsankündigung

im Fach **ANALYSIS**

- Höhere Mathematik I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Herbst 2008:

Termin der obigen Prüfungen:

- **Höhere Mathematik I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik:** Dienstag, 16. September 2008, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

Anmeldungen:

- Informatiker, Physiker und Lehramtskandidaten in Zimmer 305 (Fr. Ewald, Fr. Schreiber-Schmoeger) (Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Prüfungsamt (im Studienbüro, Gebäude 10.12) mitzubringen!)

Anmeldeschluss:

- **Mittwoch, 30. Juli 2008**

Hörsaaleinteilung:

- Die Hörsaaleinteilung wird rechtzeitig bekannt gegeben!