UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2009
27.04.2009

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Montag, den 04.05.2009, 14.00 Uhr, im 3. Stock des Allianzgebäudes

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

für $(x,y) \neq (0,0)$ gegeben. Beweisen Sie, dass dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, obwohl f in $(0,0)$ unstetig ist.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} x^2/y\,, & x^2 < y\,, \\ y/x^2\,, & 0 < y \leqslant x^2\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und in $(0,0)$ unstetig. Ist $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, so ergibt sich dennoch $g(ta,tb) \to 0$ für $t \to 0$.

Aufgabe 5 (K)

a) Zeigen Sie, daß die komplexe Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}$ absolut konvergiert, und berechnen Sie ihren Wert.

b) Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 6 (K)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\big((1+i)^n+(1-i)^n\big)z^n$.

b) Es sei $r \in [0,1)$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die komplexe Exponentialfunktion.