UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2009
04.05.2009

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Montag, den 11.05.2009, 14.00 Uhr, im 3. Stock des Allianzgebäudes

Aufgabe 7

a) Sei $f(x,y) := \log\sqrt{x^2+y^2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

b) Sei $n \geq 3$ und $f(x) := \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Zeigen Sie

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Aufgabe 8 (K)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.

b) Zeigen Sie, daß $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gilt, und beweisen Sie $f \notin C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Hinweis: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 9 (K)

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt und untersuchen Sie sie auf Stetigkeit. Ist f im Ursprung differenzierbar?

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & \text{falls } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Ursprung. Ist f dort differenzierbar?