UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2009
11.05.2009

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Montag, den 18.05.2009, 14.00 Uhr, im 3. Stock des Allianzgebäudes

Aufgabe 10

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad α, das heißt:

$$\forall\, t > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \;:\; f(tx) = t^\alpha\, f(x).$$

(1) Die Funktion f sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $t > 0$ gilt

a) $f'(x) \cdot x = \alpha\, f(x)$, **b)** $\operatorname{grad} f(tx) = t^{\alpha-1} \operatorname{grad} f(x)$.

(2) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0. Zeigen Sie, daß die Funktion f linear ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f (bezüglich der Standardbasis).

Aufgabe 11 (K)

a) Es sei $D := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\,,\; 1 < y < 2 \,\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Abschätzung

$$\left| x_1^{y_1} - x_2^{y_2} \right| \leqslant K \big\| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \big\|$$

für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ und die Konstante $K := 4\sqrt{1 + (\log 2)^2}\,$.

b) Es sei $g(t) := (\cos t, \sin t)$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall zu $a := 0$ und $b := 2\pi$ kein $\xi \in [a, b]$ mit $g(b) - g(a) = (b - a) \cdot g'(\xi)$ existiert.

Aufgabe 12 (K)

(1) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in $(0,0)$ Richtungsableitungen in jede Richtung besitzt, und berechnen Sie diese. Ist f im Ursprung differenzierbar?

(2) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < y < x^2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie für f alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, soweit sie existieren.