UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2009
18.05.2009

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Montag, den 25.05.2009, 14.00 Uhr, im 3. Stock des Allianzgebäudes

Aufgabe 13

Bestimmen Sie jeweils die Darstellung von $f(x_0+h)$, die der Satz von Taylor für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen liefert.

a) $f(x,y) = \arctan(xy)\,,\quad x_0 = (1,1)$ **b)** $f(x,y,z) = xe^z - y^2\,,\quad x_0 = (1,-1,0)$

Aufgabe 14 (K)

(1) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y^2 - 3x^2y + x^4$.

- **a)** Berechnen Sie $f'(0,0)$ und $H_f(0,0)$.
- **b)** Zeigen Sie, daß f auf allen Ursprungsgeraden ein Minimum in $(0,0)$ besitzt, das heißt: Für jedes $a \in \mathbb{R}^2$ besitzt die Funktion $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(ta)$ ein lokales Minimum in 0.
- **c)** Besitzt die Funktion f in $(0,0)$ ein lokales Minimum? (Hinweis: Betrachten Sie Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = x^2$).

(2) Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Definiere

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{m} \|x - a_k\|^2.$$

Zeigen Sie, daß g ein globales Minimum besitzt, und berechnen Sie die Stelle, an der es angenommen wird.

Aufgabe 15 (K)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, **b)** $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.