Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
23.04.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

02. Übungsblatt

Aufgabe 4:
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ von $\vec{x}$ auf U, sowie den Abstand $d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y} \in U} \|\vec{x} - \vec{y}\|$ für

(a) $U = \operatorname{lin}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$

(b) $U = \operatorname{lin}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\})$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:
Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[a, b]$ und $p_k \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$ (*Monome*). Ferner seien die Skalarprodukte $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ durch

$$\text{(a)} \quad \langle p | q \rangle_1 = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1 - y^2}} \mathrm{d}y \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(b)} \quad \langle p | q \rangle_2 = \int_{-1}^{1} p(y)q(y) \mathrm{d}y$$

für alle $p, q \in V$ erklärt. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ bzw $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ auf p_0, p_1, p_2, p_3 an.

Bemerkung: Sie erhalten die s.g. *Tschebyschow-Polynome* bei (a) und (bis auf Normierung) die s.g. *Legendre-Polynome* bei (b).

Aufgabe 6:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt:

$$\operatorname{Bild}(A)^\perp = \operatorname{Kern}(A^*)$$

Hinweis: Für $M \subseteq V$ ist $M^\perp = \{v \in V : (v|w) = 0 \quad \forall w \in M\}$ (*Orthogonalraum* von M).

— Bitte wenden! —

(b) Gilt $(A\vec{x}|\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\mathrm{Bild}(A) \perp \mathrm{Kern}(A).$$

Hinweis: Für $M, N \subseteq V$ ist $M \perp N \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in M : \forall \vec{y} \in N : (\vec{x}|\vec{y}) = 0$

Aufgabe 7:
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 8:

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 4 (a), 5 (a), 6 (a), und 7 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.