Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
30.04.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

03. Übungsblatt

Aufgabe 9:
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ von A und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte λ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_A(\lambda)$.

(c) Ist A diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, mit der $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 10:
Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ von B und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte λ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_B(\lambda)$.

(c) Ist B diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, mit der $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 11:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$(A\vec{x}|\vec{x}) = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, bereits $A = 0$ sein muss.

(b) Ist die Aussage auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ richtig?

Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe 6 (b) könnten nützlich sein.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 12:
Sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y}$$

(a) die Adjungierte T^*,

(b) den Kern(T) und

(c) das Bild(T).

Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe 6 (a) könnten nützlich sein.

Aufgabe 13:
Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(a) die *Graßmann-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}|\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}|\vec{b}),$$

(b) die *Jacobi-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0,$$

(c) sowie die *Lagrange-Identität*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \,\middle|\, \vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a}|\vec{c})(\vec{b}|\vec{d}) - (\vec{b}|\vec{c})(\vec{a}|\vec{d}).$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 9, 11 und 13 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.