Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
07.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

04. Übungsblatt

Aufgabe 14:
Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

Aufgabe 15:
Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine orthogonale Matrix T an, so dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.

(b) Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 16:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

Aufgabe 17:
Seien $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Matrizen

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

auf Definitheit.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 18:
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_A(\lambda) \setminus \left\{\vec{0}\right\} \subseteq \mathbb{C}^n$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(a) Zeigen Sie:

(i) Dann ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A und

$$\overline{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so existiert ein Eigenvektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ zum Eigenwert λ.

(b) Sei nun A orthogonal und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Bezeichne ferner

$$\vec{x}_1 := \operatorname{Re}\vec{x} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} x_1 \\ \operatorname{Re} x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} x_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{x}_2 := \operatorname{Im}\vec{x} := \begin{pmatrix} \operatorname{Im} x_1 \\ \operatorname{Im} x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} x_n \end{pmatrix}$$

den Real- bzw. Imaginärteil von $\vec{x}$. Sei $U = \operatorname{lin}(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}) \subseteq \mathbb{R}^n$ der von $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ erzeuge *reelle* Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass $(\vec{x}_1|\vec{x}_2) = 0$ und $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \neq \vec{0}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{y} \in U$ auch $A\vec{y} \in U$ gilt. Stellen Sie $A\vec{y}$ mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung von λ dar und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 19:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Man nennt A, B *simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

(a) Sind A, B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

(b) Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit eins, dann sind A, B simultan diagonalisierbar.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 14, 16 und 18 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.