Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
14.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

05. Übungsblatt

Aufgabe 20:
Betrachten Sie die Abbildungen $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad \text{und} \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j|$$

für alle $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Es handelt sich bei $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ um Normen.

(b) Es existieren Konstanten $C_{12}, C_{2\infty}, C_{\infty 1} > 0$ derart, dass

$$\|\vec{x}\|_1 \le C_{12} \|\vec{x}\|, \quad \|\vec{x}\| \le C_{2\infty} \|\vec{x}\|_\infty, \quad \|\vec{x}\|_\infty \le C_{\infty 1} \|\vec{x}\|_1$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(c) Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_\infty$ ist gleichbedeutend mit Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|$.

Aufgabe 21:

(a) Seien $\emptyset \neq I$, $(A_j)_{j\in I} \subseteq (\mathbb{R}^n)^I$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
   (i) Ist A_j offen für jedes $j \in I$, so ist auch $\cup_{j\in I} A_j$ offen.
   (ii) Sind A, B abgeschlossen, so ist auch $A \cup B$ abgeschlossen.
   (iii) Ist A offen und B abgeschlossen, so ist $A \setminus B$ offen.

(b) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:
   (i) $M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\right\}$
   (ii) $M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \ge 3) \wedge (y \ge x)\right\} \cup \{(0,0)\}$

Aufgabe 22:
Die Funktionen f, g und h sind für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

gegeben und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.

(c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 23:
Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

Aufgabe 24:
Die Kurve $\eta : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in (-1, 1)$$

gegeben. Ist η eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\eta)$ und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

Aufgabe 25:
Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin(x))$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (ye^x + x\sinh(y), y^4 + 3x^2\sin(y), 4y - x^3)$

(c) $h : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $h(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 20, 21 und 23 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.