Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
21.05.2014

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 06. Übungsblatt

**Aufgabe 26:**
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von $f$.

(c) Sind die partiellen Ableitungen von $f$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

(d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$?

**Aufgabe 27:**
Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass $g$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von $g$.

(c) Sind die partiellen Ableitungen von $g$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

(d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla g(0,0)) \cdot \vec{v}$?

**Aufgabe 28:**
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass $U$ durch $f$ bijektiv auf $V$ abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

**— Bitte wenden! —**

## Aufgabe 29:

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass $U$ durch $g$ bijektiv auf $V$ abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

(b) Zeigen Sie, dass $g$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

## Aufgabe 30:

Betrachten Sie die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ und $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, sowie

$$f(x,y) = (\log(xy), \cos(x^2+y), e^x) \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = e^x + yz + \log(z)$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $\nabla f, \nabla g$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $\nabla(g \circ f)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung $\nabla(g \circ f)$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

## Aufgabe 31:

Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

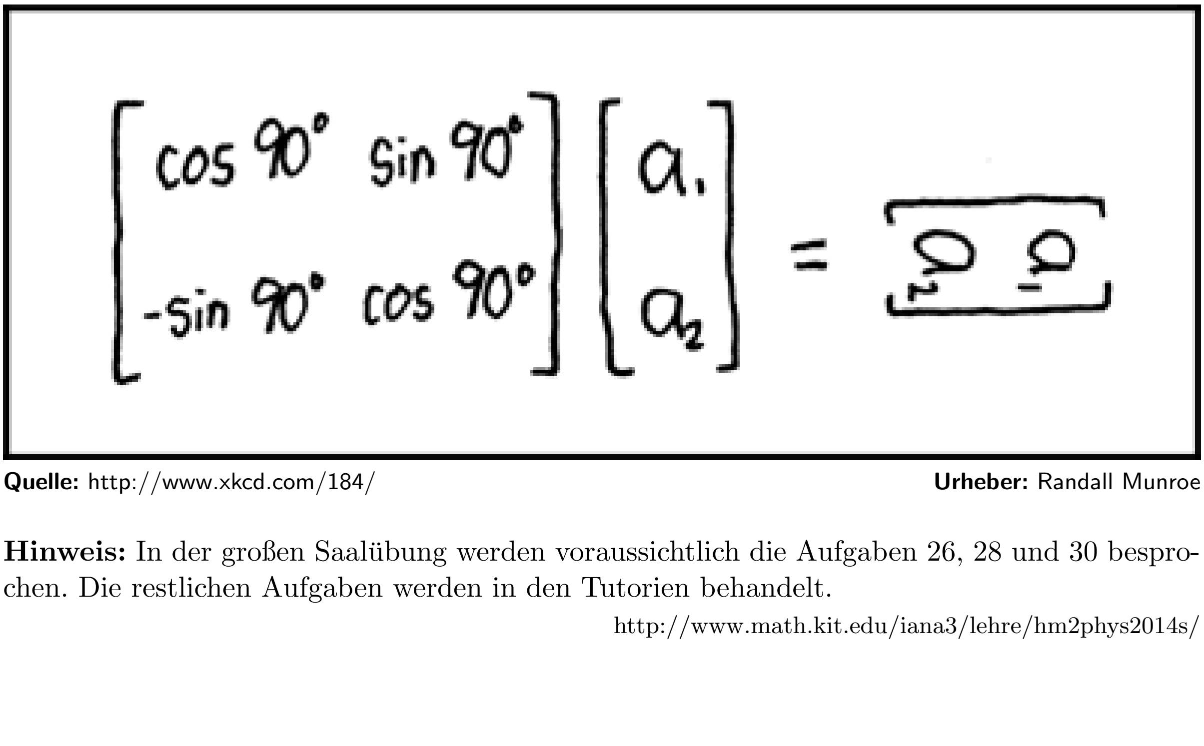
$$f(x,y) = (x^2, y^2), \qquad g(x,y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \qquad h(x,y) = (e^x\cos(y), \sinh(x))$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind.

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $\nabla f, \nabla g, \nabla h$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\nabla(g \circ f), \nabla(h \circ g)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $\nabla(g \circ f), \nabla(h \circ g)$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.




**Quelle:** http://www.xkcd.com/184/ **Urheber:** Randall Munroe

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 26, 28 und 30 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.