Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
30.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

07. Übungsblatt

Aufgabe 32:

(a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $-2 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $\varphi \in C^1(U, V)$ existieren mit

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$$

für alle $(x, y) \in U$ und alle $z \in V$.

Berechnen Sie φ'.

(b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert werden.

Berechnen Sie $u'(0, 0)$, sowie $v'(0, 0)$.

Aufgabe 33:

Es sei $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z > 1) \wedge (y + z > -1)\big\}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = \frac{1}{1 + y + z} + \log(x + y + z - 1)$$

für alle $(x, y, z) \in D$.

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $\varphi \in C^1(U, V)$ existieren mit $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$ für alle $(x, y) \in U$ und alle $z \in V$.

(b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein streng monoton fallendes $\varphi_1 \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ existieren mit $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 34:
Sei $|||\cdot||| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Norm und $\|\cdot\|_1$ die Summennorm (vgl. Aufgabe 20 auf dem Übungsblatt 05). Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$|||\vec{x}||| \le C_1 \|\vec{x}\|_1$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Es existiert eine Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\|\vec{x}\|_1 \le C_2 |||\vec{x}|||$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 35:
Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy + x - 2y - 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Aufgabe 36:
Es seien

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + 2x_2^2 = 6\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\right\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $\vec{x}_0 \in A$ und ein $\vec{y}_0$ in B existiert, mit

$$\|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| = d(A,B) := \inf_{\vec{x} \in A, \vec{y} \in B} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\}.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A,B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Aufgabe 37:
Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x + y + z = 0) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 = 1)\right\}.$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 32, 34 und 36 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.