

## Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

### 08. Übungsblatt

#### Aufgabe 38:

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, positiv definite Matrix. Betrachten Sie die Funktionenfamilie  $(\varphi_\sigma)_{\sigma > 0}$ , welche durch

$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot e^{-\frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{2\sigma}}$$

für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  und alle  $\sigma > 0$ , definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass für alle  $\sigma > 0$

$$\varphi_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x}) d\vec{x} = 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes  $\delta > 0$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0}, \delta)} \varphi_\sigma(\vec{x}) d\vec{x} = 0$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \varphi_\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x} \neq \vec{0}, \\ \infty & \text{für } \vec{x} = \vec{0}. \end{cases}$$

(d) Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  stetig in  $\vec{0}$ . Berechnen Sie

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \varphi_\sigma(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

#### Aufgabe 39:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)  $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d(x, y), \quad A = [0, 1]^2$

(b)  $\int_B x^2 y z d(x, y, z), \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$

#### Aufgabe 40:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)  $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} d(x, y), \quad A = [1, 2] \times [3, 4]$

(b)  $\int_B y^2 d(x, y, z), \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y^2 + z^2 \leq |x|\}$

**Aufgabe 41:**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)  $\int_A (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} d(x, y, z)$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\}$

(b)  $\int_B \sin(z) d(x, y, z)$ ,  $B = \{x, y, z \geq 0, x + y + 2z \leq 1\}$

**Aufgabe 42:**

Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten:

(a)  $\int_A xyz d(x, y, z)$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b)  $\int_B z(x^3 + xy^2) d(x, y, z)$ ,  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq z \leq \pi, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |\frac{y}{x}| \leq 1\}$

**Aufgabe 43:**

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, und berechnen Sie den Integralwert.

(a)  $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$

(b)  $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y dx dy$

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 38, 40 und 42 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.