Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
18.06.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 50:

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ und $r : [\alpha, \beta] \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$D = \{(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)) : \varphi \in (\alpha, \beta),\ \rho \in (0, r(\varphi))\}.$$

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(D)$ die *Leibnizsche Sektorformel*

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 \mathrm{d}\varphi$$

gilt.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit C^1-Rand ∂G und der äußeren Einheitsnormalen $\vec{n} : \partial G \to \mathbb{R}^3$. Dann gilt für das Volumen $V(G)$ von G

$$V(G) = \frac{1}{3}\int_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}).$$

Aufgabe 51:
Es sei γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ mit der Ebene $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 52:
Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ und $I = [a, b]$. Ferner sei $f \in C^1(\overline{K}(\vec{x}_0, R) \times I)$ und $r \in C^1((a, b), (0, R))$. Zeigen Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{K(\vec{x}_0, r(t))} f(\vec{x}, t)\mathrm{d}\vec{x} = \int_{K(\vec{x}_0, r(t))} \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}, t)\mathrm{d}\vec{x} + \frac{r'(t)}{r(t)}\int_{\partial K(\vec{x}_0, r(t))} f(\vec{x}, t)(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t)\mathrm{d}\sigma(\vec{x})$$

für alle $t \in (a, b)$ (*Reynolds'scher Transportsatz* für Kugeln).

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 53:
Es sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 54:
Sei $c > 0$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ sei eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t) - \Delta u(\vec{x},t) = 0.$$

Ferner sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3, T > 0$ und u erfülle die Anfangsbedingungen

$$u(\vec{x},0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = 0 \quad \forall \vec{x} \in K(\vec{x}_0, cT).$$

Schließlich bezeichne $C(\vec{x}_0,T) = \{(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) : \vec{x} \in K(\vec{x}_0, c(T-t))\}$ den *Rückwärtslichtkegel* von $(\vec{x}_0,T)$. Zeigen Sie die *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* von Störungen, d.h.

$$u(\vec{x},t) = 0 \quad \forall (\vec{x},t) \in C(\vec{x}_0,T).$$

Hinweis: Betrachten Sie die *lokale Energie* $E : [0,T] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))} \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\right)^2 + \|\nabla u(\vec{x},t)\|^2\right] \mathrm{d}\vec{x}$$

für alle $t \in [0,T]$.

Aufgabe 55:
Betrachten Sie den Kegel $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$, sowie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x,y,z) = (z, y, z+1)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f durch die Oberfläche des Kegels C nach Außen:

$$\int_{\partial C} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 50, 52 und 54 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.

Erinnerung: Die Übungsklausur) findet am Samstag, den **05. Juli 2014** von 10:00 bis 12:00 Uhr im Gerthsen-Hörsaal statt. Studierende, die die Übungsklausur als Prüfungsleistung einbringen können und wollen (z.B.: Lehramtskandidaten für Physik), melden sich für die Übungsklausur im Sekretariat bei Frau Dr. Nagatou-Plum an. Der Anmeldeschluss ist Mittwoch, der **02. Juli 2014**. Weitere Informationen finden Sie auf der Homepage der Veranstaltung.