

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 56:

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re}(f)$ oder $\operatorname{Im}(f)$ konstant, so ist schon f konstant.

Aufgabe 57:

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gelte

$$\operatorname{Re}(f)^2 = \operatorname{Im}(f).$$

Zeigen Sie, dass f konstant auf G ist.

Aufgabe 58:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Binomialreihe (vgl. Aufgabe 31 in HM1) gilt

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} z^k = (1+z)^\alpha$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Aufgabe 59:

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auf welchen Gebieten sind sie holomorph? Bestimmen Sie ggf. f' .

(a) $f(x + iy) = \sin(x) \cos(y) - i \cos(x) \cos(y)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(c) $f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\operatorname{Im}(z^2)}{|z^2|} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$

Aufgabe 60:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_\gamma |z|^2 dz$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ mit $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = 1 + it$, $\gamma_3(t) = (1-t) + i$, $\gamma_4(t) = (1-t)i$ und $t \in [0, 1]$

(b) $\int_\gamma |z|^2 dz$, $\gamma(t) = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$

(c) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Aufgabe 61:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [1, 2]$

(b) $\int_{\gamma} \bar{p}(z) dz$, $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ mit $R > 0$ und einer Polynomfunktion $p(z) = \sum_{k=0}^K a_k z^k$

(c) $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t)) dt$, sowie $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t)) dt$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 56, 58 und 60 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.