

## Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

### 12. Übungsblatt

#### Aufgabe 62:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(a)  $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

(b)  $\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} dz$

(c)  $\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi} dz$

#### Aufgabe 63:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(a)  $\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+1)} dz$  mit  $G = \{z \in \mathbb{C} : -3 < \operatorname{Re}(z) < 2, -2 < \operatorname{Im}(z) < 3\}$

(b)  $\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

(c)  $\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1} dz$

#### Aufgabe 64:

(a) Entwickeln Sie die durch  $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$  für alle  $z \in G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\}$  gegebene Funktion in eine Laurentreihe.

(b) Zeigen Sie für feste  $a > 0$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a}$

#### Aufgabe 65:

(a) Entwickeln Sie die durch  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$  für alle  $z \in G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$  gegebene Funktion in eine Laurentreihe.

(b) Zeigen Sie:  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} dx = \frac{7\pi}{16e}$

**Aufgabe 66:**

Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx$$

**Aufgabe 67:**

Es sei  $R > 0$  und die Wege  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  seien gegeben durch

$$\gamma_1(t) = t \quad (t \in [0, R]), \quad \gamma_2(t) = Re^{it} \quad \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right), \quad \gamma_3(t) = te^{i\frac{\pi}{4}} \quad (t \in [0, R]).$$

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz.$$

(b) Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

(c) Berechnen Sie den Wert der s.g. *Fresnel-Integrale*

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 62, 64 und 66 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.