Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
25.04.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 01. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Wir bilden die erweiterte Matrix

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -\frac{1}{10} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \quad \cdot(-8) \\ + \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-3) \quad \cdot(-11) \quad \mid \cdot 5 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \left(I|A^{-1}\right)$$

Also ist die Inverse A^{-1} gegeben durch:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Das gegebene lineare Gleichungssystem entspricht der Gleichung $B\vec{z} = \vec{y}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir stellen die erweiterte Matrix

$$(B|\vec{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \ \Big| \cdot \tfrac{1}{1+\mathrm{i}}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\left[\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{1^2-(\mathrm{i})^2} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}\right]
\qquad
\sim
\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Big| \cdot (-1)
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & -1+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Ablesen (vgl. Abschnitt 14.14 der Vorlesung) liefert, dass die eindeutige Lösung des gegeben linearen Gleichungssystems gerade

$$
\vec{z} = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ -1+2 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}
$$

ist.

Aufgabe 3:

Wir stellen die erweiterte Matrix

$$
(C_\alpha|\vec{y}_\alpha) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)
$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$
\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 1 & 0 & -2+4\alpha & 8-\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}
$$

Hier wird eine Fallunterscheidung notwendig.

- $\alpha \neq 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{-3+\alpha} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot 7 \quad \cdot(-10) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6+3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -4-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ablesen (vgl. Abschnitt 14.14 der Vorlesung) liefert, dass die eindeutige Lösung von $C_\alpha \, \vec{x} = \vec{y}_\alpha$ durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6+3\alpha \\ -4-2\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aus der obigen Rechnung geht auch hervor, dass $\operatorname{rg}(C_\alpha) = 3$ ist (man lasse die letzte Spalte der erweiterten Matrix weg und zähle die Anzahl linear unabhängiger Zeilen). Nach der Dimensionsformel (vgl. Abschnitt 14.16 der Vorlesung) gilt

$$3 = \dim \operatorname{Bild}(C_\alpha) + \dim \operatorname{Kern}(C_\alpha) = \underbrace{\operatorname{rg}(C_\alpha)}_{=3} + \dim \operatorname{Kern}(C_\alpha),$$

also ist $\dim \operatorname{Kern}(C_\alpha) = 0$ und $\dim \operatorname{Bild}(C_\alpha) = 3$. Also ist $\operatorname{Kern}(C_\alpha) = \left\{ \vec{0} \right\}$ und, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Bild}(C_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^3$. Damit ist $B_k = \emptyset$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(C_\alpha)$ und $B_b = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\}$ (Einheitsvektoren) eine Basis von $\operatorname{Bild}(C_\alpha)$.

- $\alpha = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen (vgl. Abschnitt 14.14 der Vorlesung) liefert, dass die Lösungsmenge von $C_3 \, \vec{x} = \vec{y}_3$ durch

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist. Ferner ist

$$\operatorname{Kern}(C_3) = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und damit ist etwa

$$B_k = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(C_3)$.

Nach Abschnitt 14.13 der Vorlesung, ist $\mathrm{Bild}(C_3)$ der lineare Aufspann der Spalten von C_3. Aus der obigen Rechnung geht auch hervor, dass $\mathrm{rg}(C_\alpha) = 2$ ist (man lasse die letzte Spalte der erweiterten Matrix weg und zähle die Anzahl linear unabhängiger Zeilen). Nach der Dimensionsformel (vgl. Abschnitt 14.16 der Vorlesung) gilt

$$3 = \dim \mathrm{Bild}(C_\alpha) + \underbrace{\dim \mathrm{Kern}(C_\alpha)}_{=1} = \mathrm{rg}(C_\alpha) + 1,$$

also ist $\dim \mathrm{Bild}(C_\alpha) = 2$. Nach Abschnitt 14.13 der Vorlesung, ist das $\mathrm{Bild}(C_3)$ der lineare Aufspann der Spalten von C_3. Sei etwa

$$B_b = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(erste zwei Spaltenvektoren von C_3). Dann ist $\mathrm{lin}(B_b) \subseteq \mathrm{Bild}(C_3)$. In jedem beliebigen Vektorraum V sind zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ genau dann linear abhängig, wenn ein $\gamma \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $v_1 = \gamma v_2$ gilt. Also ist offenbar B_b linear unabhängig und $\dim \mathrm{lin}(B_b) = \dim \mathrm{Bild}(C_3) = 2$. Nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung ist also $\mathrm{lin}(B_b) = \mathrm{Bild}(C_3)$. Damit ist B_b eine Basis von $\mathrm{Bild}(C_3)$.