

## Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

### Lösungsvorschläge zum 03. Übungsblatt

#### Aufgabe 9:

- (a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{(D2)}{=} (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot 2 \\
 &= (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1-ter Spalte}}{=}} (4 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
 &= (4 - \lambda)(\lambda - 1)^2
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also  $\lambda_1 = 1$  mit Vielfachheit 2 und  $\lambda_2 = 4$  mit Vielfachheit 1. Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  genau die Eigenwerte von  $A$  mit den algebraischen Vielfachheiten  $m_a(1) = 2$  und  $m_a(4) = 1$ .

- (b) Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  der Eigenraum  $E_A(\lambda)$  gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des  $(-1)$ -Ergänzungstricks:

- $E_A(1)$ :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array} \cdot 2 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot \frac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also ist

$$E_A(1) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und  $m_g(1) = \dim(E_A(1)) = 1$ .

- $E_A(4)$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \left| \cdot -\frac{1}{9} \right. \leftarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_A(4) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und  $m_g(4) = \dim(E_A(4)) = 1$ .

- (c) Wegen  $m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$ , ist  $A$  nach Abschnitt 18.6 der Vorlesung nicht diagonalisierbar. Aber  $A$  hat eine s.g. *Joran-Normalform* (vgl. Abschnitt 18.8 der Vorlesung). D.h. es ex. eine reguläre Matrix  $S \in \mathbb{C}^3$  mit

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $* \in \{0, 1\}$ . Da  $A$  und  $J$  ähnlich sind (vgl. Abschnitt 18.4 der Vorlesung) und  $A$  nicht diagonalisierbar ist, kann  $J$  nicht diagonalisierbar sein. Also ist  $* = 1$ .

Denken wir uns  $S$  als Matrix der Spaltenvektoren

$$S = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3)$$

geschrieben. Es gilt

$$S^{-1}AS = J \Rightarrow AS = SJ \Rightarrow A \underbrace{S\vec{e}_i}_{=\vec{s}_i} = SJ\vec{e}_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

also  $A\vec{s}_1 = 4\vec{s}_1$ ,  $A\vec{s}_2 = \vec{s}_2$  und  $A\vec{s}_3 = \vec{s}_2 + \vec{s}_3$ . Also ist  $\vec{s}_1 \in E_A(4)$ ,  $\vec{s}_2 \in E_A(1)$  und  $(A - I_3)\vec{s}_3 = \vec{s}_2$ . Wir wählen

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und lösen das lineare Gleichungssystem  $(A - I_3)\vec{s}_3 = \vec{s}_2$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-2) \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \left| \cdot \frac{1}{3} \right. \leftarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablezen liefert, dass

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist. Mit  $\mu = -1$  lässt sich

$$\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Es ist dann

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 10:

- (a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7-\lambda & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \square \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{(D2)}{=} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad + \\ \downarrow \end{array} \\
 &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 12 & 9-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entw. nach 2-ter Zeile}}{=} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -4 & -5-\lambda & -2 \\ 6 & 12 & 9-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad + \\ \downarrow \end{array} \\
 &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 3+\lambda \\ 6 & 12 & -3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{(D2)}{=} (3-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & 12 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \square \end{array} \\
 &= (3-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 7-\lambda & 0 \\ 6 & 12 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entw. nach 3-ter Spalte}}{=} (3-\lambda)(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda)(-3-\lambda)((2-\lambda)(7-\lambda) + 4) = (3-\lambda)(-3-\lambda) \underbrace{(\lambda^2 - 9\lambda + 18)}_{=(\lambda-3)(\lambda-6)} \\
 &= (3-\lambda)^2(-3-\lambda)(6-\lambda)
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also  $\lambda_1 = -3$  mit Vielfachheit 1,  $\lambda_2 = 3$  mit Vielfachheit 2 und  $\lambda_3 = 6$  mit Vielfachheit 1. Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung sind  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  genau die Eigenwerte von  $B$  mit den algebraischen Vielfachheiten  $m_a(-3) = 1$ ,  $m_a(3) = 2$  und  $m_a(6) = 1$ .

- (b) Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $B$  der Eigenraum  $E_B(\lambda)$  gegeben durch

$$E_B(\lambda) = \text{Kern}(B - \lambda I_4).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des  $(-1)$ -Ergänzungstricks:

- $E_B(-3)$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 8 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{+} \\ | \cdot \frac{1}{6} \\ \leftarrow \boxed{+} \\ | \cdot \frac{1}{6} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \\ | \cdot \frac{1}{6} \\ \leftarrow \boxed{+} \cdot (-2) \cdot (-5) \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & 11 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \cdot (-2) \cdot (-11) \cdot 2 \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{+} \\ | \cdot -\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot (-1) \cdot (-2) \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist

$$E_B(-3) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und  $m_g(-3) = \dim E_B(-3) = 1$ .

- $E_B(3)$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -10 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 2 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{+} \cdot 4 \cdot 6 \\ \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (-1) \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \cdot (-1) | \cdot -\frac{1}{6} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist

$$E_B(3) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und  $m_g(3) = \dim E_B(3) = 2$ .

- $E_B(6)$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -13 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & -1 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot -\frac{1}{3} \\ \leftarrow + \\ | \cdot -\frac{1}{3} \\ \leftarrow -2 \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ | \cdot \frac{1}{3} \\ \leftarrow -1 \\ \leftarrow -1 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ | \cdot \frac{1}{2} \end{array} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist

$$E_B(6) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

und  $m_g(6) = \dim E_B(6) = 1$ .

- (c) Wegen  $m_g(-3) + m_g(3) + m_g(6) = 1 + 2 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$ , ist  $B$  nach Abschnitt 18.6 der Vorlesung diagonalisierbar. Nach ebendiesem Abschnitt erhält man ein mögliches  $S$  indem man die bereits berechneten Eigenvektoren in eine Matrix schreibt:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 11:

- (a) Sei  $B_K = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$  eine ONB des  $\text{Kern}(A)$  (eine solche existiert nach Abschnitt 15.4 der Vorlesung). Ist  $m = n$ , so ist  $\text{Kern}(A) = \mathbb{K}^n$ , also  $A = 0$ . Sei also im Folgenden  $0 \leq m < n$ . Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Menge  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  an und erhalten eine ONB

$$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_n\}$$

des  $\mathbb{K}^n$ . Sei  $S = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  die Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren  $\vec{b}_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) sind. Es ist  $S^{-1} = S^*$  (vgl. Abschnitt 15.6 der Vorlesung). Definiere  $B = S^{-1}AS$ . Dann ist  $A = SBS^{-1}$ . Die Matrizen  $A$  und  $B$  sind ähnlich.

Bemerkung:  $B$  ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  bezüglich der Basis  $B$  (vgl. Abschnitt 18.4 der Vorlesung).

Welche Gestalt hat  $B$ ? Es gilt für jede Matrix  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$C_{ij} = (\vec{e}_i | C \vec{e}_j)$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Für die Matrix  $B$  gilt also

$$B_{ij} = (\vec{e}_i | B \vec{e}_j) = (\vec{e}_i | S^{-1} A S \vec{e}_j) = (\vec{e}_i | S^* A S \vec{e}_j) = \underbrace{(S \vec{e}_i | A S \vec{e}_j)}_{= \vec{b}_i} = \underbrace{(\vec{b}_i | A \vec{b}_j)}_{= \vec{b}_j}$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Da  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \in \text{Kern}(A)$ , ist  $B_{ij} = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und alle  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Ferner ist nach Aufgabe 6 (b)  $\text{Kern}(A) \perp \text{Bild}(A)$ . Also ist  $B_{ij} = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  und alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Damit hat  $B$  die folgende Blockgestalt

$$B = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right)$$

mit einer Matrix  $B' \in \mathbb{K}^{(n-m) \times (n-m)}$ . Das charakteristische Polynom von  $B'$  ist ein komplexes Polynom vom Grad  $n - m > 0$  (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Als solches hat es nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine (komplexe) Nullstelle  $\lambda$  (vgl. Abschnitt 5.6 der Vorlesung). Dieses  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $B'$ . Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung, existiert also ein Eigenvektor  $\vec{y}' \in \mathbb{K}^{n-m} \setminus \{\vec{0}\}$  mit  $B' \vec{y}' = \lambda \vec{y}'$ . Dann ist (wegen der Blockgestalt)

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vec{y}' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Betrachte nun

$$\vec{x} = S \vec{y} = \sum_{j=1}^{n-m} y_j \vec{b}_{j+m} \in \text{lin} \{ \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_n \}.$$

Es gilt

$$A \vec{x} = S B S^{-1} \vec{x} = S B S^{-1} S \vec{y} = S B \vec{y} = \lambda S \vec{y} = \lambda \vec{x},$$

also ist  $\vec{x} \neq \vec{0}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Wegen

$$0 = (A \vec{x} | \vec{x}) = (\lambda \vec{x} | \vec{x}) = \lambda \underbrace{(\vec{x} | \vec{x})}_{>0}$$

ist  $\lambda = 0$  und damit  $\vec{x} \in \text{Kern}(A) = \text{lin} \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \}$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $B$  Basis von  $\mathbb{K}^n$ . Also muss die Annahme  $m < n$  verworfen werden und damit ist  $A = 0$ .

□

- (b) Im Beweis in (a) wird  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  nur benutzt, um die Existenz des Eigenwerts  $\lambda$  bzw. des Eigenvektors  $\vec{y}'$  sicherzustellen. Für ein Gegenbeispiel bräuchten wir also eine Matrix  $A$ , mit nicht-reellen Eigenwerten, die die Bedingung

$$(A \vec{x} | \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt. Für  $n = 2$  liefert die *Drehmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte, denn für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i),$$

womit die Eigenwerte von  $A$  genau  $i$  und  $-i$  sind, sowie

$$\left( A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = -x_2 x_1 + x_1 x_2 = 0$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Für  $n > 2$  betrachte man die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

### Aufgabe 12:

(a) Seien  $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ . Es gilt:

$$(T\vec{x}|\vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}|\vec{z}) \stackrel{17.4}{=} \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \stackrel{17.2}{=} -\det(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) \stackrel{17.4}{=} -(\vec{z} \times \vec{y}|\vec{x}) \stackrel{(S1)}{=} (\vec{x}|\vec{z}) - (T\vec{z}|\vec{x}) = (\vec{x}|T^*\vec{z})$$

Also ist  $T^* = -T$ .

(b) Nach Abschnitt 17.3 der Vorlesung gilt für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$0 = T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y} \text{ linear abhängig,}$$

also ist  $\text{Kern}(T) = \text{lin}(\{\vec{y}\})$ .

(c) Nach Aufgabe 6 (a) gilt  $\text{Bild}(T) = \text{Kern}(T^*)^\perp$ . Mit (a) und (b) folgt

$$\text{Bild}(T) = \text{Kern}(T)^\perp = \text{lin}(\{\vec{y}\})^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{x}|\vec{y}) = 0\}.$$

### Aufgabe 13:

(a) Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1(a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ b_2(a_1 c_1 + b_3 c_3) - c_2(a_1 b_1 + a_3 b_3) \\ b_3(a_1 c_1 + a_2 c_2) - c_3(a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1(a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1(a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ b_2(a_1 c_1 + b_3 c_3) - c_2(a_1 b_1 + a_3 b_3) \\ b_3(a_1 c_1 + a_2 c_2) - c_3(a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{b}(\vec{a}|\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}|\vec{b}) \end{aligned}$$

□

(b) Die Aussage folgt direkt aus (a):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \stackrel{(a)}{=} \vec{b}(\vec{a}|\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}|\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}|\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}|\vec{c}) + \vec{a}(\vec{c}|\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}|\vec{a}) = 0$$

□

(c) Es gilt nach Abschnitt 17.13 der Vorlesung:

$$\left( \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \times \vec{d} \right) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) \stackrel{17.2}{=} \det(\vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}, \vec{a}) = (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}) \mid \vec{a})$$

Mit der Graßmann-Identität aus (a) folgt:

$$\left( \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \times \vec{d} \right) = (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}) \mid \vec{a}) = (\vec{c}(\vec{b}|\vec{d}) - \vec{d}(\vec{b}|\vec{c}) \mid \vec{a}) = (\vec{a}|\vec{c})(\vec{b}|\vec{d}) - (\vec{a}|\vec{d})(\vec{b}|\vec{c})$$

□