Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
23.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 05. Übungsblatt

Aufgabe 20:

(a) Es gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| \geq 0.$$

Also ist in der Tat $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ und $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. Wir zeigen die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) aus dem Abschnitt 15.2 der Vorlesung. Seien dazu $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n), \vec{y} = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt:

- (N1): Ist $\|\vec{x}\|_1 = 0$, so folgt für alle $k \in \{1,\dots,n\}$

  $$0 \leq |x_k| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|\vec{x}\|_1 = 0,$$

  also $x_k = 0$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ bzw. $\vec{x} = \vec{0}$.
  Ist $\|\vec{x}\|_\infty = 0$, so folgt für alle $k \in \{1,\dots,n\}$

  $$0 \leq |x_k| \leq \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| = \|\vec{x}\|_\infty ,$$

  also $x_k = 0$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ bzw. $\vec{x} = \vec{0}$.
- (N2): Es gilt in der Tat

  $$\|\alpha\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha x_j| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha|\,|x_j| = |\alpha| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = |\alpha|\,\|\vec{x}\|_1 ,$$

  sowie

  $$\|\alpha\vec{x}\|_\infty = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |\alpha x_j| = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |\alpha|\,|x_j| = |\alpha| \max_{j\in\{1,\dots,n\}} = |\alpha|\,\|\vec{x}\|_\infty .$$

- (N3): Es gilt in der Tat

  $$\|\vec{x}+\vec{y}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + |y_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|\vec{x}\|_1 + \|\vec{y}\|_1 ,$$

  sowie

  $$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|_\infty &= \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j + y_j| \leq \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| + |y_j| \\ &\leq \left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j|\right) + \left(\max_{k\in\{1,\dots,n\}} |y_k|\right) = \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty . \end{aligned}$$

□

(b) Tatsächlich gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

- $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n 1 \cdot |x_j| \overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\sqrt{n}}_{=:C_{12}} \|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j|^2}_{\leq \|\vec{x}\|_\infty^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\vec{x}\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n 1\right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\sqrt{n}}_{=:C_{2\infty}} \|\vec{x}\|_\infty$
- $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| = \underbrace{1}_{=:C_{\infty 1}} \cdot \|\vec{x}\|_1$

□

(c) Wir behandeln nur den Fall $\|\cdot\|_1$. Die Argumentation für $\|\cdot\|_\infty$ ist identisch.

Sei $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ bezüglich $\|\cdot\|_1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_1 < \frac{\varepsilon}{C_{2\infty} C_{\infty 1}}.$$

Dann gilt aber nach (b) für alle $n \geq N$:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| \leq C_{2\infty} \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_\infty \leq C_{2\infty} C_{\infty 1} \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_1 < \frac{C_{2\infty} C_{\infty 1} \varepsilon}{C_{2\infty} C_{\infty 1}} = \varepsilon$$

Also ist $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $\vec{x}_0$ bezüglich $\|\cdot\|$.

Sei umgekehrt $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $\vec{x}_0$ bezüglich $\|\cdot\|$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{C_{12}}.$$

Dann gilt aber nach (b) für alle $n \geq N$:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_1 \leq C_{12} \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \frac{C_{12}\varepsilon}{C_{12}} = \varepsilon$$

Also ist $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $\vec{x}_0$ bezüglich $\|\cdot\|_1$.

□

Aufgabe 21:

(a) (i) Sei $\vec{x} \in \cup_{j\in I} A_j$. Dann existiert ein $k \in I$ mit $\vec{x} \in A_k$. Da A_k offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $K(\vec{x}_0, r) \subseteq A_k \subseteq \cup_{j\in I} A_j$. Da $\vec{x} \in \cup_{j\in I} A_j$ beliebig war, ist $\cup_{j\in I} A_j$ offen.

□

(ii) Zu zeigen ist, dass $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ offen ist. Sei dazu $\vec{x} \in A^c \cap B^c$ beliebig. Dann ist $\vec{x} \in A^c$ und $\vec{x} \in B^c$. Da A^c und B^c offen sind, existieren $r_1, r_2 > 0$ derart, dass $K(\vec{x}, r_1) \subseteq A^c$ und $K(\vec{x}, r_2) \subseteq B^c$. Setze $r := \min\{r_1, r_2\} > 0$. Dann gilt

$$K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{x}_0, r_1) \subseteq A^c \text{ und } K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{x}_0, r_2) \subseteq B^c.$$

Also ist $K(\vec{x}_0, r) \subseteq A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

□

(iii) Es ist $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$. Nach Voraussetzung ist A^c und B abgeschlossen. Nach Aufgabenteil (ii), ist also $A^c \cup B$ abgeschlossen. Damit ist $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A \setminus B$ offen.

(b) (i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + 5y^2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$M_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x, y) < 1\big\} = f^{-1}((0, 1)).$$

Nach Abschnitt 19.3 der Vorlesung, ist also M_1 als stetiges Urbild einer offenen Menge wieder offen.

Betrachte $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((\frac{1}{2k}, 0))_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(\frac{1}{2k}, 0) \in M_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{0} \notin M_1$. Also ist M_1 nicht abgeschlossen, nach der Charakterisierung abgeschlossener Mengen aus dem Abschnitt 19.2 der Vorlesung.

(ii) Seien $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geq 3) \wedge (y \geq x)\big\}$ und $B = \{(0, 0)\}$. Dann ist $M_2 = A \cup B$. Aus der Vorlesung bekannt ist, dass endliche Mengen abgeschlossen sind. Wir zeigen, dass A abgeschlossen ist. Dann ist nach Aufgabenteil (a)(ii) auch M_2 abgeschlossen:

Sei dazu $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ konvergente Folge mit $(x_k, y_k) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. D.h., für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $x_k^2 + y_k^2 - 2x_ky_k \geq 3$ und $y_k \geq x_k$. Wegen der Monotonie der Grenzwerte folgt damit aber auch, dass $\lim_{k\to\infty} x_k^2 + y_k^2 - 2x_ky_k = x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 \geq 3$ und $\lim_{k\to\infty} y_k = y_0 \geq x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$. Also in der Tat $(x_0, y_0) \in A$.

Es ist $\vec{x}_k := (\frac{1}{k}, 0) \in (A \cup B)^c = M_2^c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner ist $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{0}$. Aber, wegen $\vec{0} \in M_2$, ist $\vec{0} \notin M_2^c$. Damit ist M_2^c nicht abgeschlossen und per Definition M_2 nicht offen.

Aufgabe 22:

(a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen.

Sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) \to (0, 0)$ und $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$|f(x_k, y_k)| = \left|\frac{x_ky_k^2}{x_k^2 + y_k^2}\right| \overset{\text{A.-G.-Mittel}}{\leq} |y_k| \frac{x_k^2 + y_k^2}{2(x_k^2 + y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \to 0 = f(0, 0)$$

für $k \to \infty$. Damit ist f stetig in $(0, 0)$.

(b) Die Funktion g ist unstetig in $(0, 0)$, denn $(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \to (0, 0)$ für $k \to \infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = g(0, 0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, $\cos(\varphi) = 0$. Dann ist $\sin(\varphi) \neq 0$ und

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4\sin^4(\varphi)} = 0 \to 0 = g(0, 0)$$

für $r \to 0+$. Ist $\cos(\varphi) \neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4\sin^4(\varphi)} = r\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + r^2\sin^4(\varphi)} \to 0 = g(0, 0)$$

für $r \to 0+$.

(c) Die Funktion h ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\to 0 = h(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{0}{0 + \underbrace{(x-0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y \to 0$. Ist $x = 0$, so ist $h(x,y) = 0 \to 0$ für $y \to 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y\to 0} \lim_{x \to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Aufgabe 23:

Es gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_0^t \|\dot\gamma(s)\| \, \mathrm{d}s = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = \psi(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die Parameterisierung nach Weglänge von γ ist durch

$$\gamma \circ \psi^{-1}(s) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} s\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} s\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} s\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}} s \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

Aufgabe 24:

Es gilt

$$\dot\eta(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\dot\eta(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1, 1)$. Deshalb ist η regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_{-1}^t \|\dot\eta(s)\| \, \mathrm{d}s = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) - \arcsin(-1)\right) = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Es ist also $L(\eta) = \psi(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $\psi^{-1} : [0, \sqrt{2}\pi]$ ist durch

$$\psi^{-1}(s) = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die Parameterisierung nach Weglänge von η ist dann durch

$$\eta \circ \psi^{-1}(s) = \eta\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

Aufgabe 25:

(a) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= ((1+xy^2z^3)y^2z^3e^{xy^2z^3}, 2xe^y + \cos(x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= (2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, x^2e^y) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= (3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, 0) \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= (ye^x + \sinh(y), 6x\sin(y), -3x^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (e^x + x\cosh(y), 4y^3 + 3x^2\cos(y), 4) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi,\vartheta) &= (\cos(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi,\vartheta) &= (-r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial h}{\partial \vartheta}(r,\varphi,\vartheta) &= (-r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos(\vartheta)) \end{aligned}$$

für alle $(r,\varphi,\vartheta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.