Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
30.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 06. Übungsblatt

Aufgabe 26:

(a) Klar: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x, y) \neq (0, 0)$. Ferner gilt

$$\left|\frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = |y| \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |y| \frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Also ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Für $(x, y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{-2x(x^2 + y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0, 0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1.$$

(c) Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0, 0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4\frac{1}{k^4}}{4\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig bei $(0, 0)$.

Betrachte $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \to (0, 0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Also ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ unstetig bei $(0, 0)$.

(d) Sei $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v}) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3(v_y^3 - v_x^2 v_y)}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2}$$

Ferner ist $(\nabla f)(0,0) \cdot \vec{v} = v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot \vec{v} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2} = v_y \\ &\Leftrightarrow \quad v_y^3 - v_x^2 v_y = v_x^2 v_y + v_y^3 \\ &\Leftrightarrow \quad v_x^2 v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \vee v_y = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 27:

(a) Klar: g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Es ist $|\sin(x)| = \sin(|x|)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Ferner gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0, \infty)$. Es folgt

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\sin(\left|x^3 + y^3\right|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left|x^3 + y^3\right|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3 + |y|^3}^{\leq 2\|(x,y)\|_\infty^3}}{\underbrace{x^2 + y^2}_{\geq \|(x,y)\|_\infty^2}} \leq 2\,\|(x,y)\|_\infty$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$ mit $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$. Deshalb gilt mit den Ergebnissen der Aufgabe 20 in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Also ist g stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Wegen $g(x,y) = g(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, reicht es aus, lediglich $\frac{\partial g}{\partial x}$ auszurechnen. Es ist dann $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)\cos(x^3+y^3) - 2x\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2\cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

(c) Betrachte $(x_k, y_k) := (0, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) = 0\frac{1}{k^4} = 0 \not\to 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Also sind $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

(d) Sei $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) \quad &= \quad \lim_{t\to 0} \frac{g(t\vec{v}) - g((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \quad \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(v_x^3 + v_y^3)\cos(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{3t^2(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2}\end{aligned}$$

Ferner ist $(\nabla g)(0,0) \cdot \vec{v} = v_x + v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla g)(0,0) \cdot \vec{v} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2} = v_x + v_y \\
&\Leftrightarrow \quad v_x^3 + v_y^3 = v_x^3 + v_y^3 + v_x^2 v_y + v_x v_y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad -v_x^2 v_y = v_x v_y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \vee v_y = 0 \vee v_x = -v_y
\end{aligned}$$

Aufgabe 28:

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2+\arctan(x))\cos(y) \\ -e^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot(-\frac{2}{3}) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} | \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ | \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \frac{\sin^2(y) e^x}{1+x^2} + e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y+2\pi) \\ -e^x \cos(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 29:
Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(x)\cos(y) & -\cosh(x)\sin(y) \\ \cosh(x)\sin(x) & \sinh(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$g\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\log(2))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sinh(\log(2))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$g'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{4}{5} \\ \mid \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $g'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$

$$(g^{-1})'\left(0, \frac{3}{4}\right) = (g^{-1})'\left(g\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[g'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(g'(x,y)) = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(g'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. g ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$g(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y+2\pi) \\ \sinh(x)\sin(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist g nicht injektiv.

Aufgabe 30:

(a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, ist f differenzierbar und es gilt für alle $(x,y) \in D$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

Ebenfalls ist g differenzierbar und es gilt für alle $(x,y,z) \in E$:

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & z & y + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

(b) Für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} xy & e^x & \cos(x^2y^2) + e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y - 2xe^x \sin(x^2+y) + 1 + e^x \cos(x^2+y) & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in D$.

(c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g \circ f)(x,y) = xy + e^x \cos(x^2+y) + x$$

für alle $(x, y) \in D$. Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x \cos(x^2+y) - 2xe^x \sin(x^2+y) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in D$.

Aufgabe 31:

(a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, sind f, g und h differenzierbar und es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ \cosh(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$h'(g(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$(g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned} &(h \circ g)'(x,y) = h'(g(x,y)) \cdot g'(x,y) \\ = &\begin{pmatrix} y\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x^2y^2) & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$(h \circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}) & \sinh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x} & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial y} \\ \frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial x} & \frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x \cos(x^2+y) - 2xe^x \sin(x^2+y) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix}, \text{ sowie} \end{aligned}$$

$$(h \circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (h\circ g)_1}{\partial x} & \frac{\partial (h\circ g)_1}{\partial y} \\ \frac{\partial (h\circ g)_2}{\partial x} & \frac{\partial (h\circ g)_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y\cos(xy)e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)}e^{x+y}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)}e^{x+y}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in D$.