Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
13.06.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 08. Übungsblatt

Aufgabe 38:
Da die Matrix A symmetrisch und reell ist, existiert nach Satz aus Abschnitt 18.7 der Vorlesung eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $A = SDS^T$. Dabei ist $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Da A positiv definit ist, gilt nach Abschnitt 18.9 der Vorlesung, $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Definiere (vgl. Aufgabe 14 (b))

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und $W = SD'S^T$. Es ist $W^2 = SD'S^TSD'S^T = A$, $W^T = (S^T)^T(D')^TS^T = W$. Folglich ist

$$\vec{x}^TA\vec{x} = \vec{x}^TW^2\vec{x} = (W^T\vec{x})^T \cdot (W\vec{x}) = (W\vec{x})^T \cdot (W\vec{x}) = \|W\vec{x}\|^2 \tag{1}$$

(a) Sei $\sigma > 0$ fest. Da $\varphi_\sigma(\vec{x}) > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist, reicht es aus $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = 1$ nachzurechnen. Betrachte dazu die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(\vec{x}) := \sqrt{2\sigma}W^{-1}\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es ist $T'(\vec{x}) = \sqrt{2\sigma}W^{-1}$ bzw. $\det(T'(\vec{x})) = \frac{(\sqrt{2\sigma})^n}{\det(W)} = \frac{(\sqrt{2\sigma})^n}{\sqrt{\det(A)}} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Nach dem Transformationssatz aus Abschnitt 19.7 der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} &= \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left\|\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}W\vec{x}\right\|^2}\mathrm{d}\vec{x} = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{T(\mathbb{R}^n)} e^{-\left\|T^{-1}(\vec{x})\right\|^2}\mathrm{d}\vec{x} \\
&= \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2}\left|\det(T'(\vec{y}))\right|\mathrm{d}\vec{y} = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2}\mathrm{d}\vec{y} \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\sum_{j=1}^n |y_j|^2}\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1|^2}\mathrm{d}y_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-|y_n|^2}\mathrm{d}y_n \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x}_{=\sqrt{\pi} \text{ nach Abschnitt 19.7}} \right)^n = 1.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt für alle $\sigma > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}}_{=1,\text{ nach (a)}} - \int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

Also reicht es aus, $\lim_{\sigma\to 0+} \int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = 1$ zu zeigen. Sei $\sigma > 0$ zunächst fest. Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T(\vec{x}) = \sqrt{\sigma}\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es ist dann $T'(\vec{x}) = \sqrt{\sigma} I_n$ bzw. $\det(T'(\vec{x})) = (\sqrt{\sigma})^n > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Des Weiteren ist $T(K(\vec{0}, \frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})) = K(\vec{0}, \delta)$. Nach dem Transformationssatz aus Abschnitt 19.7 der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} &= \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{T(K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}}))} e^{-\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2\sigma}}\mathrm{d}\vec{x} = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \int_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})} e^{-\frac{\vec{y}^T A\vec{y}}{2}}\mathrm{d}\vec{y} \\
&= \int_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})} \varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y}
\end{aligned}$$

Es gilt ferner für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\sigma\to 0+} \mathbb{1}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y}) = 1,$$

sowie

$$0 \leq \mathbb{1}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y}) \leq \varphi_1(\vec{y}).$$

Nach Teilaufgabe (a), ist $\varphi_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz aus Abschnitt 19.4 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 0+} \int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} &= \lim_{\sigma\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\sigma\to 0+} \mathbb{1}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = 1
\end{aligned}$$

(c) Für $\vec{x} = \vec{0}$ gilt

$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot e^{-\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2\sigma}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}}}_{>0} \cdot \sigma^{-\frac{n}{2}} \to \infty$$

für $\sigma \to 0+$.

Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ hingegen ist

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\sigma\to 0+} \varphi_\sigma(\vec{x}) = \lim_{\sigma\to 0+} \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot e^{-\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^{\frac{n}{2}}}{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}} \\
&\leq \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{\overbrace{\nu^n}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \frac{n}{\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}} \lim_{\nu\to\infty} \frac{\overbrace{\nu^{n-1}}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}}_{\to\infty}} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \cdots \overset{\text{l'Hospital}}{=} \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \frac{2^n n!}{(\vec{x}^T A\vec{x})^n} \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}} = 0.
\end{aligned}$$

(d) Nach Teilaufgabe (c) ist $\lim_{\sigma\to 0+}\varphi_\sigma(\vec{x}) = 0$ für fast alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. Damit gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\lim_{\sigma\to 0+}\varphi_\sigma(\vec{x})}_{=0 \text{ f. ü.}} f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = 0$$

Wir zeigen:

$$\lim_{\sigma\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = f(\vec{0}).$$

Betrachte dazu für ein $\sigma > 0$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - f(\vec{0})\right| \overset{\text{(a)}}{=} \left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})(f(\vec{x})-f(\vec{0}))\mathrm{d}\vec{x}\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})\left|f(\vec{x})-f(\vec{0})\right|\mathrm{d}\vec{x}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig in $\vec{0}$ ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\left|f(\vec{x})-f(\vec{0})\right| < \epsilon$$

für alle $\vec{x}\in K(\vec{0},\delta)$ ausfällt. Es gilt

$$\begin{aligned}\min_{\vec{x}\notin K(\vec{0},\delta)} \vec{x}^T A\vec{x} \quad &= \quad \min_{\vec{x}\notin K(\vec{0},\delta)}(W\vec{x}|W\vec{x}) = \min_{\vec{x}\notin K(\vec{0},\delta)}(SD'S^T\vec{x}|SD'S^T\vec{x}) = \min_{\vec{x}\notin K(\vec{0},\delta)}(SD'S^T\vec{x}|SD'S^T\vec{x})\\ &\overset{S\text{ orth.}}{=} \quad \min_{\vec{x}\notin K(\vec{0},\delta)}(D'S^T\vec{x}|D'S^T\vec{x}) \overset{S\text{ orth.}}{=} \min_{\vec{y}\notin K(\vec{0},\delta)}(D'\vec{y}|D'\vec{y}) = \min_{\vec{y}\notin K(\vec{0},\delta)}\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \geq \lambda_{\min}\delta^2.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} - f(\vec{0})\right| \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})\left|f(\vec{x})-f(\vec{0})\right|\mathrm{d}\vec{x}\\ &= \quad \int_{K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\underbrace{\left|f(\vec{x})-f(\vec{0})\right|}_{<\varepsilon}\mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\left|f(\vec{x})-f(\vec{0})\right|\mathrm{d}\vec{x}\\ &\leq \quad \varepsilon\cdot\int_{K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\left(|f(\vec{x})| + \left|f(\vec{0})\right|\right)\mathrm{d}\vec{x}\\ &\leq \quad \varepsilon\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}}_{=1\text{ nach (a)}} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\,|f(\vec{x})|\,\mathrm{d}\vec{x} + \left|f(\vec{0})\right|\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}\\ &\leq \quad \varepsilon + \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}}e^{-\frac{\lambda_{\min}\delta^2}{2\sigma}}\cdot\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}|f(\vec{x})|\,\mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}\\ &\leq \quad \varepsilon + \underbrace{\sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}}e^{-\frac{\lambda_{\min}\delta^2}{2\sigma}}}_{\to 0\text{ nach (c)}}\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}|f(\vec{x})|\,\mathrm{d}\vec{x}}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},\delta)}\varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}}_{\to 0\text{ nach (c)}} \xrightarrow{\sigma\to 0+} \varepsilon\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{\sigma\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\sigma(\vec{x})f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = f(\vec{0}).$$

Aufgabe 39:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\
&= [\mathrm{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \mathrm{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y = \mathrm{Arsinh}(1) - [\mathrm{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \mathrm{Arsinh}(1) - \mathrm{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung)

$$\int_B x^2yz\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 z\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=0}^{z=2}\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y) = 2\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y)$$

mit

$$B' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x,\, x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für x, y liefert:

$$\begin{aligned}
\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2\cos^2(\varphi)\rho\sin(\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\int_B x^2yz\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{2}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Aufgabe 40:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_1^2\left[\frac{1}{x+y}\right]_{y=3}^{y=4}\mathrm{d}x = \int_1^2\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x - \int_1^2\frac{1}{x+4}\mathrm{d}x \\
&= [\log(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\log(x+4)]_{x=1}^{x=2} = \log\left(\frac{5}{4}\right) - \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log\left(\frac{25}{24}\right)
\end{aligned}$$

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \leq |x| \Leftrightarrow |x| \leq 1$. Deshalb folgt mit dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\int_B y^2 \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \int_{B_x} y^2 \mathrm{d}(y,z) \mathrm{d}x$$

mit

$$B_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2 + z^2 \leq |x|\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für y, z liefert

$$\int_{B_x} y^2 \mathrm{d}(y,z) = \int_0^{2\pi} \int_{|x|}^{\sqrt{|x|}} \rho^2 \cos^2(\varphi) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \pi \frac{1}{4} \left[\rho^4\right]_{\rho=|x|}^{\rho=\sqrt{|x|}} = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right)$$

für alle $x \in [-1,1]$. Da nun im Integranden nur gerade Potenzen von x vorkommen, folgt:

$$\int_B y^2 \mathrm{d}(x,y,z) = 2\int_0^1 \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{15}$$

Aufgabe 41:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} \rho^4 e^{2(1-z)^7} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^1 e^{2(1-z)^7} \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{3} \int_0^1 e^{2(1-z)^7} (1-z)^6 \mathrm{d}z \\
&\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3} \int_0^1 e^{2x^7} x^6 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{14} \cdot \left[e^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{42}(e^2 - 1)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_B \sin(z) \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\frac{1-x-y}{2}} \sin(z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = -\int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - \cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x) + 2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x) - 2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - 4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{7}{2} + 4\cos\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 42:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A xyz \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho\cos(\varphi) \rho \sin(\varphi) z \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \int_0^1 z \mathrm{d}z \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot \frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_B z(x^3+xy^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-\pi}^{\pi} z \int_1^2 \rho^3 \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z \\ &= 0 \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 43:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, 0\le y\le x\le 1\}}(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x e^{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

(b) Es ist:

$$\begin{aligned} B &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\le y\le 1,\, y\le x\le y^2+1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, ((0\le x\le 1)\vee(x>1))\wedge(0\le y\le 1)\wedge(y\le x\le y^2+1)\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, ((0\le y\le x\le 1)\vee((1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1))\right\} \\ &= \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\le y\le x\le 1\right\}}_{=B_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, (1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1)\right\}}_{=B_2}\end{aligned}$$

Ferner ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_B x^2 y \mathrm{d}(x,y) = \int_{B_1} x^2 y\mathrm{d}(x,y) + \int_{B_2} x^2 y \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2 \frac{1-(x-1)}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10} + \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{67}{120}\end{aligned}$$