

## Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

### Lösungsvorschläge zum 09. Übungsblatt

#### Aufgabe 44:

Betrachte die Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$F(\varphi, \vartheta) = ((R + r \cos(\vartheta)) \cos(\varphi), (R + r \cos(\vartheta)) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta))$$

für alle  $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen:  $F$  ist injektiv auf  $[0, 2\pi)^2$ : Seien dazu  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$  und  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi)$  mit  $F(\varphi_1, \vartheta_1) = F(\varphi_2, \vartheta_2)$ . Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \ni (F_1(\varphi_1, \vartheta_1), F_2(\varphi_1, \vartheta_1)) &= \underbrace{(R + r \cos(\vartheta_1))}_{>0} (\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \\ &= \underbrace{(R + r \cos(\vartheta_2))}_{>0} (\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)) = (F_1(\varphi_2, \vartheta_2), F_2(\varphi_2, \vartheta_2)) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der Polarkoordinaten auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  gilt  $\varphi_1 = \varphi_2$  und  $(R + r \cos(\vartheta_2)) = (R + r \cos(\vartheta_1))$ . Mit  $F_3(\varphi_1, \vartheta_1) = F_3(\varphi_2, \vartheta_2)$ , folgt weiter

$$\begin{aligned} r \cos(\vartheta_1) &= r \cos(\vartheta_2), \\ r \sin(\vartheta_1) &= r \sin(\vartheta_2). \end{aligned}$$

Wieder folgt mit der Bijektivität der Polarkoordinaten auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ , dass  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  gilt. Damit hat sich  $F$  als injektiv auf  $[0, 2\pi)^2$  erwiesen.

Es gilt

$$F'(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r \cos(\vartheta)) & -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)(R + r \cos(\vartheta)) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ 0 & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für alle  $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist

$$\sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T \cdot F'(\varphi, \vartheta))} = \sqrt{\begin{vmatrix} (R + r \cos(\vartheta))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}} = r(R + r \cos(\vartheta)) > 0$$

für alle  $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$  und damit ist  $\text{rg}(T'(\varphi, \vartheta)) = 2$  für alle  $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ . Definiere  $U = (0, 2\pi)^2$ , sowie  $N_1 = \{F(\varphi, 0) : \varphi \in (0, 2\pi)\}$ ,  $N_2 = \{F(0, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi)\}$  und  $N_3 = \{F(0, 0)\}$ . Es ist  $N_1 \subseteq F((0, 2\pi) \times (-\pi, \pi))$ ,  $N_2 \subseteq F((-\pi, \pi) \times (0, 2\pi))$  und  $N_3 \subseteq F((-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi))$ . Damit gilt nach Abschnitt 20.6 der Vorlesung:

$$\begin{aligned} o(N_1) &= \int_{(0, 2\pi) \times \{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} d(\varphi, \vartheta) = 0 \\ o(N_2) &= \int_{\{0\} \times (0, 2\pi)} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} d(\varphi, \vartheta) = 0 \\ o(N_3) &= \int_{\{0\} \times \{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} d(\varphi, \vartheta) = 0 \end{aligned}$$

Also ist  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$  eine  $o$ -Nullmenge. Es ist ferner  $\mathbb{T}_r^R = F(U) \cup N$ . Wieder nach Abschnitt 20.6 der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} o(\mathbb{T}_r^R) &= \int_{F(U)} d\sigma = \int_U \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} d(\varphi, \vartheta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + \cos(\vartheta)) d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + \cos(\vartheta)) d\vartheta = 4\pi^2 r R \end{aligned}$$

### Aufgabe 45:

Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Dimension  $n$ :

- $n = 2$ : Mit Hilfe der Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0}, R)} \|\vec{x}\|^\alpha d\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \rho^\alpha \rho d\varphi d\rho = 2\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+1} d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha+2} [\rho^{\alpha+2}]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -2, \\ 2\pi [\log(\rho)]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{2\pi}{\alpha+2} R^{\alpha+2} & \text{für } \alpha < -2, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

- $n = 3$ : Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0}, R)} \|\vec{x}\|^\alpha d\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^\alpha \rho^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi d\rho = 4\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+2} d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi}{\alpha+3} [\rho^{\alpha+3}]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -3, \\ 4\pi [\log(\rho)]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{4\pi}{\alpha+3} R^{\alpha+3} & \text{für } \alpha < -3, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -3 \end{cases} \end{aligned}$$

### Aufgabe 46:

(a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t)\sin(t)}, \cos(t)\sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^\pi \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)} dt - \int_\pi^{2\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)} dt \\ &\stackrel{t=\tau+\pi}{=} \left[ -\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^\pi \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)} dt + \int_0^\pi \sin(\tau)e^{\cos(\tau)\sin(\tau)} d\tau = 0 \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend und  $f$  ein  $C^1$ -Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass  $f$  ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0, 0), \quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right) = (-1, 2).$$

Wähle also  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tilde{\gamma}(t) = t(-1, 2)$ . Es gilt:

$$\int_{\gamma} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) dt = \int_0^1 4t^2 + 10t^2 dt = 14 \int_0^1 t^2 dt = \frac{8}{3} [t^3]_{t=0}^{t=1} = \frac{14}{3}$$

### Aufgabe 47:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) &= -15y^2 z e^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) &= (-3x^2 - 5y^3 + x^3 z + 5xy^3 z) e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) \end{aligned}$$

für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}^3$  einfach zusammenhängend und  $f$  ein  $C^1$ -Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass  $f$  ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0, 0, 0), \quad \gamma(1) = (1, 0, 0).$$

Wähle also  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\tilde{\gamma}(t) = (t, 0, 0)$ . Es gilt:

$$\int_{\gamma} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) dt = \int_0^1 2t dt = [t^2]_{t=0}^{t=1} = 1$$

(b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^{\log(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot (\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t)) dt \\ &= \int_0^{\log(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t) \cosh(t) dt \\ &= \int_0^{\log(2)} 1 + \sinh(t) \cosh(t) dt = \log(2) + \frac{1}{2} [\sinh^2(t)]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2) + \frac{9}{32} \end{aligned}$$

### Aufgabe 48:

(a) Seien  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\gamma_1(t) = (0, t), \quad \gamma_2(t) = (1 - t, t), \quad \gamma_3(t) = (0, 1 - t)$$

für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann ist  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  eine doppelpunktfreie Parameterisierung von  $\partial D$ . Dabei liegt  $D$  immer „links von  $\gamma$ “. Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt + \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \dot{\gamma}_3(t) dt \\ &= \int_0^1 [(t^2)] + [ -((1-t)^2 + (1-t)t) + ((1-t)^2 t - t^2) ] + [(1-t)^2] dt \\ &= \int_0^1 -(1-t)t + (1-t)^2 t dt = \int_0^1 (1-t)t(1-t-1) dt \\ &= \int_0^1 t^3 - t^2 dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$  (vgl. Abschnitt 20.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f \cdot d\vec{s} &= \int_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dx dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy - x dy dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)^2 - x(1-x) dx = \int_0^1 x(1-x)(1-x-1) dx = -\int_0^1 x^2(1-x) dx \\ &= \int_0^1 x^3 - x^2 dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

### Aufgabe 49:

(a) Da  $B$  invariant ist unter Vertauschungen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  gilt:

$$\int_B (xy + yz + zx) d(x, y, z) = 3 \int_B xy d(x, y, z)$$

Mit Hilfe der Kugelkoordinaten (vgl. Abschnitt 21.6 der Vorlesung) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3 \int_B xy d(x, y, z) &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos(\varphi) \cos(\theta) r \sin(\varphi) \cos(\theta) r^2 \cos(\theta) dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cos^3(\theta) d\varphi d\theta \\ &= \frac{3}{5} \left[ \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(\theta)) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{10} [\sin(\theta) - \frac{1}{3} \sin^3(\theta)]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(b) Sei  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $F(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Wir beobachten

$$\nabla \cdot F(x, y, z) = yz + xz + xy$$

für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Ferner ist  $\partial B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$  mit

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(0, y, z) : y, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1\}, \\ A_2 &= \{(x, 0, z) : x, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 1\}, \\ A_3 &= \{(x, y, 0) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ A_4 &= \{(x, y, z) : x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Da  $F(x, y, z) = \vec{0}$  für jedes  $(x, y, z) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$  ausfällt, gilt nach dem Gaußschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 21.10) der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \int_B (xy + yz + zx) d(x, y, z) &= \int_B \nabla \cdot F(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\partial B} F \cdot N(x, y, z) d\sigma \\ &= \int_{A_4} F \cdot N(x, y, z) d\sigma \end{aligned}$$

Auf  $A_4$  ist der äußere Normalenvektor durch

$$N(x, y, z) = (x, y, z)$$

für alle  $(x, y, z) \in A_4$  gegeben. Da  $A_4$  invariant unter Vertauschungen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  ist, gilt:

$$\int_{A_4} F \cdot N(x, y, z) d\sigma = \int_{A_4} x^2yz + xy^2z + xyz^2 d\sigma = 3 \int_{A_4} x^2yz d\sigma$$

Es folgt mit Hilfe der sphärischen Koordinaten (vgl. Abschnitt 21.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} 3 \int_{A_4} x^2yz d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) \sin(\varphi) \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) \cos^4(\theta) \sin(\theta) d\varphi d\theta \\ &= [\cos^3(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{5} [\cos^5(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$