Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
27.06.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 50:

(a) Durch Einführung von Polarkoordinaten folgt:

$$A(D) = \int_D 1 \mathrm{d}\vec{x} = \int_\alpha^\beta \int_0^{r(\varphi)} 1 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi$$

□

(b) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 20.7) der Vorlesung):

$$V(G) = \int_G 1 \mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{3} \int_G \underbrace{(\nabla \cdot \vec{x})}_{=3} \mathrm{d}\vec{x} \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{3} \int_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$$

□

Aufgabe 51:

(a) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ von ∂Z ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Entsprechend ist

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Damit gilt für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3(\varphi), \cos^3(\varphi), -(1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^3) \cdot \\
&\quad (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi) - (\sin(\varphi) - \cos(\varphi))(1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^3 \mathrm{d}\varphi \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi) \mathrm{d}\varphi - \frac{1}{4} \left[(1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^4 \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&\overset{\text{vgl. A. 5}}{=} 2 \left[\frac{3}{8}\varphi - \cos(\varphi) \left(\frac{\sin^3(\varphi)}{4} + \frac{3\sin(\varphi)}{8} \right) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

(b) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ der Fläche $M = E \cap Z$ (bis auf die σ-Nullmenge $N = \{(x,y,z) \in M : x \geq 0, y = 0\}$) ist durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 - r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,2\pi)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement (vgl. Abschnitt 21.8 des Skriptes)

$$\begin{aligned}
\vec{n}\mathrm{d}\sigma((r,\varphi)) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)(r,\varphi)\mathrm{d}(r,\varphi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \end{pmatrix} \mathrm{d}(r,\varphi) \\
&= r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(r,\varphi)
\end{aligned}$$

für alle $(r,\varphi) \in (0,1) \times (0,2\pi)$. Als letzte Vorbereitung berechnen wir

$$\nabla \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es folgt mit dem Satz von Stokes (vgl. Abschnitt 20.8 der Vorlesung):

$$\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_M \nabla \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{3}{2}\pi$$

Aufgabe 52:

Sei zunächst $t \in (a,b)$ fest. Wegen $r(t) > 0$ ist die Abbildung $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\Phi_t(\vec{y}) = \vec{x}_0 + r(t)\vec{x}$ bijektiv, stetig differenzierbar mit $\det(\Phi_t'(\vec{y})) = r^3(t) > 0$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\Phi_t'(\vec{y})$ regulär für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Ferner ist $\Phi_t(K(\vec{0},1)) = K(\vec{x}_0, r(t))$ Nach dem Transformationssatz (vgl. Abschnitt 19.7 der Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K(\vec{x}_0,r(t))} f(\vec{x},t)\mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\Phi_t(K(\vec{0},1))} f(\vec{x},t)\mathrm{d}\vec{x} \\
&= \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \left|\det(\Phi_t'(\vec{y}))\right| \mathrm{d}\vec{y} \\
&= r^3(t) \int_{K(\vec{0},1)} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y}, t)\mathrm{d}\vec{y}
\end{aligned}$$

Die Menge $\overline{K}(\vec{0},1)$ ist beschränkt und abgeschlossen, also, nach dem Satz aus Abschnitt 18.17 der Vorlesung, kompakt. Ferner ist für jedes $t \in (a,b)$ die Abbildung $\vec{y} \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}),t)$ stetig. Nach Abschnitt 18.17 der Vorlesung ist also $\vec{y} \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}),t)$ beschränkt auf $\overline{K}(\vec{0},1)$. Deshalb existiert das Integral

$$\int_{K(\vec{0},1)} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y}, t)\mathrm{d}\vec{y}$$

für jedes $t \in (a,b)$. Die Abbildung $(\vec{y},t) \to f(\Phi_t(\vec{y}),t)$ ist stetig differenzierbar für alle $(\vec{y},t) \in D := K(\vec{0},1) \times (a,b)$ und es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\Phi_t(\vec{y}),t) = \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} r'(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t)$$

für alle $(\vec{y},t) \in D$. Da (a,b) offen ist, existiert für jedes feste $s \in (a,b)$ ein $\delta_t > 0$ mit $I_s := [s-\delta, s+\delta] \subseteq (a,b)$. Da $r \in C^1((a,b))$ und I_s kompakt ist, ist r' beschränkt auf I_s. Da $f \in C^1(\overline{D})$, ist f' beschränkt auf $\overline{D}$. Also existiert eine Konstante C derart, dass

$$\left| \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \right| \leq C$$

für alle $(\vec{y},t) \in K(\vec{0},1) \times I_s$ ausfällt. Insbesondere ist

$$\int_{K(\vec{0},1)} \left| \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \right| \mathrm{d}\vec{y} \leq C \frac{4}{3}\pi$$

für alle $t \in I_s$. Nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen (vgl. Abschnitt 19.4 der Vorlesung), ist

$$t \mapsto \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \mathrm{d}\vec{y}$$

differenzierbar auf (a,b) und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^3(t) \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \mathrm{d}\vec{y} \quad &= \quad 3r'(t) r^2(t) \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \mathrm{d}\vec{y} \\
&\quad + r^3(t) \int_{K(\vec{0},1)} \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \mathrm{d}\vec{y} \\
&\overset{\text{Satz 19.7}}{=} \int_{K(\vec{x}_0,r(t))} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} \\
&\quad + r'(t) \int_{K(\vec{x}_0,r(t))} \frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r(t)} \mathrm{d}\vec{x}
\end{aligned}$$

für alle $t \in (a,b)$. Schließlich gilt

$$\frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r(t)} = \nabla_{\vec{x}} \cdot \left(f(\vec{x},t) \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r(t)} \right)$$

für alle $(\vec{x},t) \in D$. Nach dem Gauß'schen Divergenzsatz aus Abschnitt 20.7 der Vorlesung gilt deshalb

$$\int_{K(\vec{x}_0,r(t))} \frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r(t)} \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\partial K(\vec{x}_0,r(t))} f(\vec{x},t) \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r(t)} \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$$

für alle $t \in (a,b)$. Dies schließt den Beweis ab.

Aufgabe 53:

(a) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$ (bis auf die σ-Nullmenge $N = \{(0,0,1)\}$) der Fläche M ist durch

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ und alle $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement (vgl. Abschnitt 21.8 des Skriptes)

$$\begin{aligned}
\vec{n}\mathrm{d}\sigma((\varphi,\theta)) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)(\varphi,\theta)\mathrm{d}(\varphi,\theta) \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)) \end{pmatrix} \mathrm{d}(\varphi,\theta) \\
&= \cos(\theta)\Phi(\varphi,\theta)\mathrm{d}(\varphi,\theta)
\end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Es gilt mit der Definition des Oberflächenintegrals (vgl. Abschnitt 20.5 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cos(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\cos(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos^3(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\left[-\sin(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \cos^3(\theta)\sin(\theta)\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\theta = 0
\end{aligned}$$

(b) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Randes ∂M von M ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Es gilt

$$\gamma(\varphi)' = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ferner liefert die *„Technik des scharfen Hinsehens“*$^{\mathrm{TM}}$, dass für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2y}{2}, y)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\nabla \times F = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt. Es folgt mit dem Satz von Stokes (vgl. Abschnitt 20.8 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) &= \int_M (\nabla \times F(\vec{x})) \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} \int_\gamma F(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{2}, \sin(\varphi)\right) \cdot (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{2}\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{8}\left[\cos^4(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 54:
Klar: $E(T)=0$. Ferner sieht man, wie in Aufgabe 52, mit Hilfe des Transformationssatzes

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\right)^2+\|\nabla u(\vec{x},t)\|^2\right]\mathrm{d}\vec{x} \\ &= \frac{(c(T-t))^3}{2}\int_{K(\vec{0},1)}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}_0+c(T-t)\vec{y},t)\right)^2+\|\nabla u(\vec{x}_0+c(T-t)\vec{y},t)\|^2\right]\mathrm{d}\vec{y} \end{aligned}$$

für alle $t\in[0,T)$. Da der Integrand stetig ist auf der kompakten Menge $\overline{K}(\vec{0},1)\times[0,T]$, ist er dort beschränkt. Nach dem Satz über Stetigkeit der Parameterintegrale (vgl. Abschnitt 19.4 der Vorlesung), ist E stetig in 0.

Wir berechnen mit Hilfe des Reynolds'schen Transportsatzes (vgl. Aufgabe 52) für jedes $t\in(0,T)$:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\right)^2+\|\nabla u(\vec{x},t)\|^2\right]\mathrm{d}\vec{x} \\ &= \int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))}\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla u(\vec{x},t)\right)\cdot\nabla u(\vec{x},t)\mathrm{d}\vec{x} \\ &\quad -\frac{c}{2}\int_{\partial K(\vec{x}_0,c(T-t))}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\right)^2+\|\nabla u(\vec{x},t)\|^2\right]\underbrace{\underbrace{\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{c(T-t)}}_{=\vec{n}(\vec{x},t)}\cdot\vec{n}(\vec{x},t)}_{=1}\,\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) \end{aligned}$$

Nach der ersten Greenschen Formel (vgl. Abschnitt 20.8 der Vorlesung) gilt

$$\begin{aligned} \int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla u(\vec{x},t)\right)\cdot\nabla u(\vec{x},t)\mathrm{d}\vec{x} &= -\int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t)\right)\Delta u(\vec{x},t)\mathrm{d}\vec{x} \\ &\quad +\int_{\partial K(\vec{x}_0,c(T-t))}\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}(\vec{x},t)}(\vec{x},t)\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in die Formel für $E'(t)$ liefert:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{K(\vec{x}_0,c(T-t))}\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t)-\Delta u(\vec{x},t)\right)}_{=0} \\ &\quad +c\int_{\partial K(\vec{x}_0,c(T-t))}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}(\vec{x},t)}(\vec{x},t)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t)\right)^2+\|\nabla u(\vec{x},t)\|^2\right]\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) \end{aligned}$$

Wegen

$$\left|\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}(\vec{x},t)}(\vec{x},t)\right|\overset{\text{C.S.U.}}{\leq}\left|\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t)\right|\|\nabla u(\vec{x},t)\|\leq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t)\right)^2+\|\nabla u(\vec{x},t)\|^2\right]$$

für alle $(\vec{x},t)\in\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$, folgt $E'(t)\leq 0$ für alle $t\in(0,T)$. Also gilt $0=E(0)\geq E(t)\geq 0$ für alle $t\in[0,T)$, bzw. $E\equiv 0$. Da u stetig ist, folgt damit $u(\vec{x},t)=0$ für alle $(\vec{x},t)\in C(\vec{x}_0,T)$.

Aufgabe 55:
Nach dem Gaußschen Divergenzsatz aus Abschnitt 20.7 der Vorlesung gilt:

$$\int_{\partial C}f(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x})=\int_C(\nabla\cdot f)(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

Es ist

$$(\nabla \cdot f)(\vec{x}) = 1 + 1 = 2$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned}
\int_C (\nabla \cdot f)(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} &= 2\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{2\pi} \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z = 4\pi \int_0^2 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=(2-z)} \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^2 (2-z)^2 \mathrm{d}z \\
&= -\frac{2\pi}{3}\left[(2-z)^3\right]_{z=0}^{z=2} = \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}$$