

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 56:

Notiere $\mathbb{C} \ni z = x + iy$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f) = u + iv$ mit $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$. Da f holomorph auf G ist, gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, also

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

für alle $x + iy \in G$. Da nach Voraussetzung u oder v konstant ist, ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ oder $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. In beiden Fällen ist $f' \equiv 0$.

Sei $z_0 \in G$ fest und $z \in G$ beliebig. Da G , aufgefasst als Teilmenge von \mathbb{R}^2 , ein Gebiet ist, existiert ein Streckenzug $S[z_0, z_1, \dots, z_m] \subseteq G$ mit $z_m = z$. Mit dem mehrdimensionalen Mittelwertsatz (vgl. Abschnitt 19.16 des Skriptes), existiert für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ ein $\xi_j \in S[z_j, z_{j-1}]$ und ein $\eta_j \in S[z_j, z_{j-1}]$ mit

$$u(z_j) - u(z_{j-1}) = ((z_j - z_{j-1}) \cdot \nabla) u(\xi_j) = 0 \text{ bzw. } v(z_j) - v(z_{j-1}) = ((z_j - z_{j-1}) \cdot \nabla) v(\eta_j) = 0.$$

Damit $u(z) - u(z_0) = \sum_{j=1}^m u(z_j) - u(z_{j-1}) = 0$ und $v(z) - v(z_0) = \sum_{j=1}^m v(z_j) - v(z_{j-1}) = 0$, bzw. $f(z) = f(z_0)$.

□

Aufgabe 57:

Notiere $\mathbb{C} \ni z = x + iy$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f) = u + iv$ mit $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$. Da f holomorph auf G ist, gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, also

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

für alle $x + iy \in G$. Mit der Voraussetzung folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 2u(z) \frac{\partial u}{\partial x}(z), \text{ sowie } \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 2u(z) \frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

für alle $z \in G$. Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 2u(z) \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -2u(z) \frac{\partial v}{\partial x}(z) = -4u^2(z) \frac{\partial u}{\partial x}(z), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 2u(z) \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2u(z) \frac{\partial v}{\partial y}(z) = -4u^2(z) \frac{\partial u}{\partial y}(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in G$. Damit ist $\nabla u(z) = 0$ für alle $z \in G$. Da G ein Gebiet ist, ist u konstant auf G . Mit Aufgabe 56 folgt, dass dann auch f konstant sein muss.

□

Aufgabe 58:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $\operatorname{Re}(z) \geq -|z| > -1$, also $(1+z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Damit ist die Abbildung $f: K(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$ holomorph auf $K(0,1) \subseteq \mathbb{C}$ (vgl. Abschnitt 22.15 des Skriptes).

Nach Abschnitt 22.8 des Skriptes, lässt sich diese Abbildung in die folgende Potenzreihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

für alle $z \in K(0,1) \subseteq \mathbb{C}$. Man sieht induktiv ein

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha|_{z=0} &= 1, \\ \frac{d}{dz}(1+z)^\alpha|_{z=0} &= \alpha(1+z)^{\alpha-1}|_{z=0} = \alpha, \\ \frac{d^2}{dz^2}(1+z)^\alpha|_{z=0} &= \frac{d}{dz}\alpha(1+z)^{\alpha-1}|_{z=0} = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}|_{z=0} = \alpha(\alpha-1), \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha-j), \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also lautet die obige Potenzreihe in der Tat

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha-j)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

□

Aufgabe 59:

Es sei für alle Teilaufgaben $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$. Komplexe Differenzierbarkeit in $z = x + iy$ ist äquivalent zur reellen Differenzierbarkeit und Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen in z (vgl. Abschnitt 22.3 des Skriptes).

(a) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \cos(x) \cos(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\sin(x) \sin(y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \sin(x) \cos(y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \cos(x) \sin(y) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &\Leftrightarrow \cos(x) \cos(y) = \cos(x) \sin(y) \Leftrightarrow (\cos(x) = 0) \vee (\cos(y) = \sin(y)) \\ &\Leftrightarrow (x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \vee (y \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &\Leftrightarrow \sin(x) \sin(y) = \sin(x) \cos(y) \Leftrightarrow (\sin(x) = 0) \vee (\sin(y) = \cos(y)) \\ &\Leftrightarrow (x \in \pi\mathbb{Z}) \vee (y \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist f genau auf $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\}$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x) \cos(y) + i \sin(x) \cos(y)$ für alle $z \in A$. Da für kein $z \in A$ und kein $\varepsilon > 0$ die Relation $K(z, \varepsilon) \subseteq A$ gilt, ist f auf keinem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph.

(b) Es ist gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{x^2 - y^2 + i2xy + x^2 - y^2 - i2xy}{x^2 + y^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2 \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 8x \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2 \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -8y \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &\Leftrightarrow 8x \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &\Leftrightarrow 8y \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist f genau auf $A = \{0 \neq z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re}(z) = 0) \vee (\operatorname{Im}(z) = 0)\}$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ für alle $z \in A$. Da für kein $z \in A$ und kein $\varepsilon > 0$ die Relation $K(z, \varepsilon) \subseteq A$ gilt, ist f auf keinem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph.

(c) Es ist gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{(1 + i) \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2} = 2 \frac{(1 + i)xy}{x^2 + y^2} = 2 \frac{xy}{x^2 + y^2} + i2 \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2 \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = 2y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(y, x) = 2 \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 2x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &\Leftrightarrow 2y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Leftrightarrow -y(x^2 - y^2) = x(x^2 - y^2) \\ &\Leftrightarrow (x = -y) \vee (x^2 = y^2) \Leftrightarrow |x| = |y| \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &\Leftrightarrow 2x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -2y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \Leftrightarrow x(x^2 - y^2) = y(x^2 - y^2) \\ &\Leftrightarrow (x = y) \vee (x^2 = y^2) \Leftrightarrow |x| = |y| \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Betrachte $z_k = (1+i) \left(\frac{1}{k}\right)$. Klar: $z_k \rightarrow 0$ und $f(z_k) = \frac{(1+i)^{\frac{2}{k^2}}}{\frac{2}{k^2}} = (1+i) \not\rightarrow 0 = f(0)$. Also ist f unstetig bei 0 und erst recht nicht komplex differenzierbar bei 0.

Also ist f genau auf $A = \{0 \neq z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)^2 = \operatorname{Im}(z)^2\}$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ für alle $z \in A$. Da für kein $z \in A$ und kein $\varepsilon > 0$ die Relation $K(z, \varepsilon) \subseteq A$ gilt, ist f auf keinem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph.

Aufgabe 60:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma_1'(t) &= 1 \\ \gamma_2'(t) &= i \\ \gamma_3'(t) &= -1 \\ \gamma_4'(t) &= -i \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, 1]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skripts) ist folglich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |z|^2 dz &= \int_{\gamma_1} |z|^2 dz + \int_{\gamma_2} |z|^2 dz + \int_{\gamma_3} |z|^2 dz + \int_{\gamma_4} |z|^2 dz \\ &= \int_0^1 t^2 \cdot 1 dt + \int_0^1 (1+t^2) \cdot i dt + \int_0^1 ((1-t)^2 + 1) \cdot (-1) dt + \int_0^1 (1-t)^2 \cdot (-i) dt \\ &= \int_0^1 2t - 2 dt + i \int_0^1 2t dt = [t^2]_{t=0}^{t=1} - 2 + i [t^2]_{t=0}^{t=1} \\ &= -1 + i. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\gamma'(t) = (1+i)$$

für alle $t \in [0, 1]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skripts) ist folglich

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_0^1 2t^2 \cdot (1+i) dt = (1+i) \frac{2}{3}.$$

(c) Es ist

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$. Die obige Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \infty$ (vgl. HM1). Nach Abschnitt 22.4 des Skriptes ist die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, holomorph auf \mathbb{C} . Da γ einfach geschlossen und \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 22.6 des Skriptes)

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z} dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Aufgabe 61:

(a) Es gilt

$$\gamma'(t) = 1 + 2it$$

für alle $t \in [1, 2]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skriptes) ist folglich

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_1^2 (t - it^2) \cdot (1 + 2it) dt = \int_1^2 t + 2t^3 dt + i \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_{t=1}^{t=2} + i \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=1}^{t=2} = 9 + i \frac{7}{3}.$$

(b) Es gilt

$$\gamma'(t) = iRe^{it}$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skriptes) ist folglich

$$\int_{\gamma} \bar{p}(z) dz = \sum_{k=0}^K \bar{a}_k \int_{\gamma} \bar{z}^k dz = iR \sum_{k=0}^K \bar{a}_k R^k \int_0^{2\pi} e^{-ikt} e^{it} dt = iR \sum_{k=0}^K \bar{a}_k R^k \int_0^{2\pi} e^{i(1-k)t} dt.$$

Für $k = 1$ ist $\int_0^{2\pi} e^{i(1-k)t} dt = 2\pi$. Für $k \neq 1$ ist $-\frac{i}{1-k} e^{i(1-k)t}$ eine Stammfunktion von $e^{i(1-k)t}$ und folglich ist

$$\int_0^{2\pi} e^{i(1-k)t} dt = - \left[\frac{i}{1-k} e^{i(1-k)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Deshalb ist $\int_{\gamma} \bar{p}(z) dz = iR\bar{a}_1 R^1 2\pi = 2iR^2 \bar{a}_1$.

(c) Betrachte

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t)) dt + i \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t)) dt &= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \\ &\quad (\cos(t + \cos(t)) + i \sin(t + \cos(t))) dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} e^{i(t + \cos(t))} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t) + i \cos(t)} e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(\cos(t) + i \sin(t))} e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ie^{it}} e^{it} dt. \end{aligned}$$

Definiere $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $f(z) = e^{iz}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathbb{C} und γ einfach geschlossen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 22.6 des Skriptes) ist der Wert des obigen Integrals deswegen

$$\int_0^{2\pi} e^{ie^{it}} e^{it} dt = -i \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Da für $z \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ gilt, muss

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t)) dt &= 0 \text{ und} \\ \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t)) dt &= 0 \end{aligned}$$

gelten.