

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 62:

- (a) Der Integrand $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = 1$ und eine doppelte Polstelle bei $z_1 = -3$. Da nur z_0 vom Integrationsweg umlaufen wird, liefert der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Das Residuum berechnet sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{e}{4^2}.$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = \frac{ie\pi}{8}$.

- (b) Wir berechnen die Laurententwicklung von $g(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$. Es gilt

$$g(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1 + \frac{1}{1-z}} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Die isolierte Singularität bei $z_0 = 1$ wird vom Integrationsweg ein Mal umlaufen. Der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes liefert

$$\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, z_0).$$

Das Residuum ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ in der Laurentreihe, also $\operatorname{Res}(g, z_0) = -\frac{1}{e}$. Insgesamt ist also $\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} dz = -\frac{2\pi i}{e}$.

- (c) Der Integrand $h(z) = \frac{ze^{iz}}{z-\pi}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = \pi$. Diese wird vom Integrationsweg ein Mal umlaufen. Der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes liefert

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h, z_0).$$

Das Residuum berechnet sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\operatorname{Res}(h, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) h(z) = \pi e^{i\pi} = -\pi.$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi} dz = -2i\pi^2$.

Aufgabe 63:

- (a) Der Integrand $f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ besitzt einfache Polstellen bei $z_0 = 1$, $z_1 = -2$ und $z_2 = -i$. Da alle Polstellen vom Integrationsweg ein Mal umlaufen werden, liefert der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)).$$

Die Residuen berechnen sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1-i}{3},$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{-4}{-3(-2+i)} = -\frac{4(2+i)}{15},$$

$$\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_1)f(z) = \frac{-2i}{(-i-1)(-i+2)} = \frac{i(1-i)}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = 0$.

- (b) Der Integrand $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = 1$ und eine doppelte Polstelle bei $z_1 = -3$. Da alle Polstellen vom Integrationsweg ein Mal umlaufen werden, liefert der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = 2\pi i (\text{Res}(g, z_0) + \text{Res}(g, z_1)).$$

Die Residuen berechnen sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\text{Res}(g, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = \frac{e}{16},$$

$$\text{Res}(g, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} (z - z_1)^2 g(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2} = -\frac{5e^{-3}}{16}$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = \frac{\pi i}{8} (e - 5e^{-3})$.

- (c) Wegen

$$h(z) = \frac{z}{e^{iz} - 1} = \frac{z}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} - 1} = \frac{1}{i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^{k-1}}{k!}}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, hat h eine hebbare Singularität bei $z_0 = 0$. Der Integrationsweg umläuft z_0 ein Mal. Alle weiteren isolierten Singularitäten von h bei $z_k = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ werden nicht umlaufen. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz} - 1} dz = 0.$$

Aufgabe 64:

- (a) Es gilt

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - i^2} = \frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}$$

für alle $0 < |z - i| < 2$. Ferner gilt

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-i)^k}{(2i)^{k+1}}$$

für alle $|z - i| < 2$ (geometrische Reihe). Insgesamt folgt

$$f(z) = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-i)^k}{(2i)^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-i)^k$$

für alle $0 < |z - i| < 2$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2(2i)^{k+1}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Es gilt

$$g(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{ia, -ia\}$. Also sind $z_0 = ia$ und $z_1 = -ia$ zweifache Polstellen von g . Nach Abschnitt 22.13 des Skriptes, berechnet man

$$\text{Res}(g, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{2z(z+ia)^2 - 2z^2(z+ia)}{(z+ia)^4} = -\frac{i}{4a}.$$

Sei nun $R > a$, $\gamma_1^R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_1^R(t) = t$ für alle $t \in [-R, R]$, sowie $\gamma_2^R(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_2^R(t) = Re^{it}$ für alle $t \in [0, \pi]$. Ferner sei $\gamma^R = \gamma_1^R + \gamma_2^R$. Die isolierte Singularität z_0 von g wird von γ^R ein Mal umlaufen, während z_1 nicht umlaufen wird. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{\gamma_1^R} g(z) dz + \int_{\gamma_2^R} g(z) dz = \int_{\gamma^R} g(z) dz = 2\pi i \text{Res}(g, z_0) = \frac{\pi}{2a}.$$

Klar $\int_{\gamma_1^R} g(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$. Es ist $L(\gamma_2^R) = \pi R$, sowie

$$|g(\gamma(t))| = \left| \frac{R^2 e^{2it}}{(R^2 e^{2it} + a^2)^2} \right| \leq \frac{R^2}{(R^2 - a^2)^2}$$

für alle $t \in [0, \pi]$. Nach Abschnitt 22.5 des Skriptes gilt

$$\left| \int_{\gamma_2^R} g(z) dz \right| \leq L(\gamma_2^R) \max \{|g(z)| : z \in \gamma_2^R([0, \pi])\} \leq \frac{\pi R^3}{(R^2 - a^2)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Es folgt somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a}.$$

Aufgabe 65:

(a) Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$$

für alle $0 < |z| < 1$. Ferner gilt

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

für alle $|z| < 1$ (geometrische Reihe), sowie

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$$

für alle $|z| < 2$ (geometrische Reihe). Insgesamt folgt

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right) z^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

für alle $0 < |z| < 1$ mit

$$a_k = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{k+2}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zunächst beobachtet man, weil das Integral im Lebesgueschen Sinne existiert, dass

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^3} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^3} dx \right). \end{aligned}$$

Sei $g(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3} = \frac{e^{iz}}{(z+i)^3(z-i)^3}$. Die isolierten Singularitäten von g sind also $z_0 = -i$ und $z_1 = i$. Bei beiden handelt es sich um höchstens dreifache Polstellen. Für das Residuum $\operatorname{Res}(g, z_1)$ von g in z_1 gilt deshalb nach Abschnitt 22.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (z - z_1)^3 g(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^{iz}}{(z+i)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} \frac{ie^{iz}}{(z+i)^3} - 3 \frac{e^{iz}}{(z+i)^4} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{iz}}{(z+i)^3} - 3 \frac{ie^{iz}}{(z+i)^4} - 3 \frac{ie^{iz}}{(z+i)^4} + 12 \frac{e^{iz}}{(z+i)^5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{8e} - \frac{6i}{16e} - \frac{12i}{32e} \right) \\ &= -\frac{i7}{e16}. \end{aligned}$$

Seien $R > 0$, $S > 1$ und

$$\begin{aligned}\gamma_1^R : [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_1^R(t) &= t \quad \forall t \in [-R, R] \\ \gamma_2^{(R,S)} : [0, S] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2^{(R,S)}(t) &= -R + it, \quad \forall t \in [0, S] \\ \gamma_3^{(R,S)} : [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_3^{(R,S)}(t) &= t + iS, \quad \forall t \in [-R, R] \\ \gamma_4^{(R,S)} : [0, S] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_4^{(R,S)}(t) &= R + i(S - t) \quad \forall t \in [0, S].\end{aligned}$$

Da $\gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1$ positiv orientiert, einfach und geschlossen ist und genau die isolierte Singularität z_1 (also nicht z_0) von g umläuft, gilt mit dem Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^3} dx = \int_{\gamma_1^R} g(z) dz = \int_{\gamma_2^{(R,S)}} g(z) dz + \int_{\gamma_3^{(R,S)}} g(z) dz + \int_{\gamma_4^{(R,S)}} g(z) dz + 2\pi i \operatorname{Res}(g, z_1).$$

Es gilt mit der Abschätzung aus Abschnitt 22.5 des Skriptes

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2^{(R,S)}} g(z) dz \right| &\leq L(\gamma_2^{(R,S)}) \cdot \max \left\{ |g(z)| : z \in \gamma_2^{(R,S)}([0, S]) \right\} \\ &= S \cdot \max \left\{ \left| g(\gamma_2^{(R,S)}(t)) \right| : t \in [0, S] \right\} \\ &= S \cdot \max_{t \in [0, S]} \left| \frac{e^{-R+it}}{(-R+(t-1)i)^3(-R+(t+1)i)^3} \right| \\ &= S \cdot \max_{t \in [0, S]} \frac{e^{-R}}{|-R+(t-1)i|^3 \cdot |-R+(t+1)i|^3} \leq \frac{Se^{-R}}{2R^3}, \\ \left| \int_{\gamma_3^{(R,S)}} g(z) dz \right| &\leq L(\gamma_3^{(R,S)}) \cdot \max \left\{ |g(z)| : z \in \gamma_3^{(R,S)}([-R, R]) \right\} \\ &= 2R \cdot \max_{t \in [-R, R]} \left| \frac{e^{-S+it}}{(t+(S-1)i)^3(t+(S+1)i)^3} \right| \\ &\leq 2R \cdot \frac{e^{-S}}{(S-1)^3} \leq 2R \cdot \frac{e^{-S}}{S^3}, \\ \left| \int_{\gamma_4^{(R,S)}} g(z) dz \right| &\leq L(\gamma_4^{(R,S)}) \cdot \max \left\{ |g(z)| : z \in \gamma_4^{(R,S)}([0, S]) \right\} \\ &= S \cdot \max_{t \in [0, S]} \left| \frac{e^{iR-(S-t)}}{(R+(S-t-1)i)^3(R+(S-t+1)i)^3} \right| \\ &\stackrel{(S-t)=\tau}{\leq} S \cdot \max_{\tau \in [0, S]} \frac{e^{-\tau}}{2R^3} = \frac{S}{2R^3}.\end{aligned}$$

Für $S = R$ folgt damit („Exponentialfunktion gewinnt gegen Polynome“)

$$\int_{\gamma_2^{(R,R)}} g(z) dz, \int_{\gamma_3^{(R,R)}} g(z) dz, \int_{\gamma_4^{(R,R)}} g(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt die Behauptung

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^3} dx \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (2\pi i \operatorname{Res}(g, z_1)) = \operatorname{Re} \left(\frac{7\pi}{e16} \right) = \frac{7\pi}{e16}.$$

Aufgabe 66:

Zunächst sei festgehalten, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-(i+\varepsilon)x^2}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} < \infty$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Also existiert das Integral im Lebesgue-Sinne und, wegen der Punktsymmetrie des Integranden, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx$$

Sei nun $R > 0$ fest, $w := \sqrt{\varepsilon + i}$, $0 < \varphi_0 := \text{Arg}(w) < \frac{\pi}{4}$. Ferner seien $\gamma_1^R : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_1^R(t) = wt$ für alle $t \in [0, R]$, $\gamma_2^R : [0, |w|R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_2^R(t) = t$ für alle $t \in [0, |w|R]$, sowie $\gamma_3^R : [0, \varphi_0] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_3^R(t) = R|w|e^{it}$. Da $f(z) = e^{-z^2}$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx &= \frac{1}{w} \int_0^R e^{-(wx)^2} w dx = \frac{1}{w} \int_{\gamma_1^R} e^{-z^2} dz = \frac{1}{w} \left(\int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3^R} e^{-z^2} dz \right) \\ &= \frac{1}{w} \int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} dz + \frac{1}{w} \int_{\gamma_3^R} e^{-z^2} dz = \frac{1}{w} \underbrace{\int_0^{|w|R} e^{-x^2} dx}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}} + \frac{i|w|R}{w} \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2|w|^2 e^{2it}} e^{it} dt. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \frac{i|w|R}{w} \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2|w|^2 e^{2it}} e^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\varphi_0} \left| e^{-R^2|w|^2 (\cos(2t) + i \sin(2t))} \right| dt \\ &= R \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2|w|^2 \cos(2t)} dt \\ &\stackrel{\text{cos fallend auf } [0, \frac{\pi}{2}]}{\leq} R \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2|w|^2 \cos(2\varphi_0)} dt \\ &\leq \frac{\pi}{4} R e^{-R^2|w|^2 \overbrace{\cos(2\varphi_0)}^{>0}} \xrightarrow{\text{l'Hospital}} 0 \end{aligned}$$

ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon + i}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - i).$$

Aufgabe 67:

(a) Der Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ ist einfach und geschlossen. Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = e^{-z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dies impliziert die Behauptung.

(b) Es gilt nach Definition des komplexen Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| &= \left| iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} e^{it} dt \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{-R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} \right| dt = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\
 &= R \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-R^2 \cos(2t)} dt + R \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\
 &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-R^2 \cos(\frac{\pi}{4})} dt + \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} R \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\
 &\leq \frac{\pi}{8} R e^{-R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{2} R \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\
 &= \frac{\pi}{8} R e^{-R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2R} \left[e^{-R^2 \cos(2t)} \right]_{t=\frac{\pi}{8}}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} R e^{-R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2R} \left[1 - e^{-R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^R e^{-x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
 \int_{\gamma_3} f(z) dz &= e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-t^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\int_0^R \cos(t^2) dx - i \int_0^R \sin(t^2) dt \right)
 \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen der Aufgabenteilen (a) und (b) folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
 \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$